Michał Charlak[1], Marek A. Jakubowski[2]

ANALIZA KONCEPCJI ZBIORÓW PRZYBLIŻONYCH

Streszczenie. Artykuł zawiera analizę opisu podstaw matematycznych teorii zbiorów rozmytych opracowanych przez Z. Pawlaka. Praca zawiera znany w literaturze dowód Z. Pawlaka, stwierdzający, że idea zbiorów przybliżonych nie może być zredukowana do idei zbiorów rozmytych poprzez wprowadzenie przybliżonej funkcji przynależności. Istnieją więc zagadnienia, które są możliwe do rozwiązanie z zastosowaniem zbiorów przybliżonych a nie znajdują rozwiązania w zbiorach rozmytych. Na podstawie analizy i interpretacji przykładów określone zostały przyczyny trudności z zastosowaniem teorii zbiorów przybliżonych.

WSTĘP

Koncepcja zbiorów przybliżonych została przedstawiona przez Zdzisława Pawlaka w 1982 roku, a niektóre właściwości i zastosowania tej koncepcji były analizowane w wielu późniejszych pracach (np. Orłowska i Pawlak 1984; Materska M. 1994; Pedrycz W. 1998 i innych). Teoria zbiorów przybliżonych przedstawiona przez Z. Pawlaka nie jest jednak znana i rozpowszechniona w zastosowaniach praktycznych tak jak teoria zbiorów rozmytych. Przyczyną tego stanu mogą być liczne nieścisłości w interpretacji koncepcji zbiorów przybliżonych. Dokładna analiza wczesnych koncepcji teorii Z. Pawlaka skłania nas do postawienia tezy, że niektóre sformułowania i nieścisłości zapisu matematycznego mogą być przyczyną błędnej interpretacji teorii i problemów w zastosowaniach praktycznych.

W artykule zostanie przedstawiona analiza i własna interpretacja koncepcji zbiorów przybliżonych i logiki rozmytej Z. Pawlaka. Zostaną przedstawione różnice między tymi teoriami oraz analiza przykładów zastosowania.

ZBIORY PRZYBLIŻONE

W tej części przedstawiono autorską interpretację koncepcji teorii zbiorów przybliżonych przedstawionej przez prof. Z. Pawlaka w 1984 r. w publikacji „Rough sets and fuzzy sets” [7] z korektą nieścisłości zapisu matematycznego.

---

[1] Michał Charlak – Katedra Podstaw Techniki, Politechnika Lubelska.
[2] Marek A. Jakubowski – Katedra Metod i Technik Nauczania, Politechnika Lubelska.

Niech U będzie zbiorem zwanym uniwersum oraz niech R będzie równoważną zależnością U, zwaną nierozróżnialną relacją (indiscernibility relation). Odpowiedniki klas relacji R zwane są elementarnymi zbiorami w A (pusty zbiór jest także elementarnym). Każda alternatywa zbiorów elementarnych jest zbiorem złożonym w A. Rodzina wszystkich zbiorów złożonych jest oznaczona jako Com(A). Para $A = (U, R)$ nazywana jest przestrzenią aproksymacji.

Niech $X \subseteq U$ będzie podzbiorem U. Definiujemy dolne i górne przybliżenie X w A, zapisując $\underline{A}(X)$ i $\overline{A}(X)$ jak poniżej:

$$\underline{A}(X) = \{ x \in U: [x]_R \subset X\}$$

$$\overline{A}(X) = \{ x \in U: [x]_R \cap X \neq 0\}$$

gdzie $[x]_R$ oznacza równowartość klas relacji R zawierającej element x.

$$Fr_A(X) = \overline{A}(X) - \underline{A}(X) \text{ oznacza granicę } X \text{ w } A.$$

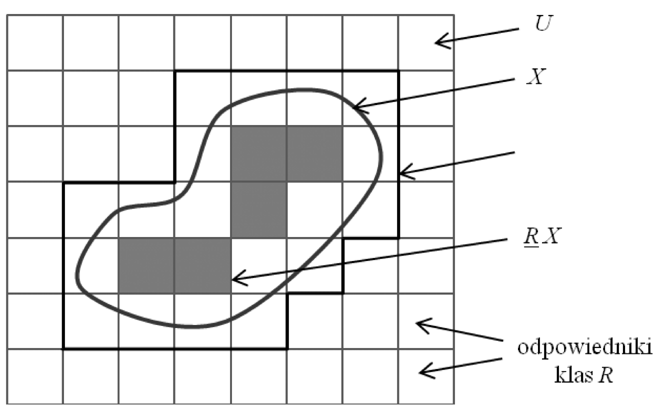
W ten sposób możemy określić dwie funkcje przynależności $\underline{\in}_A$, $\overline{\in}_A$ zwane silną i słabą przynależnością:

$$x \,\underline{\in}_A\, X \quad \text{jeżeli} \quad x \in \underline{A}(X),$$

$$x \,\overline{\in}_A\, X \quad \text{jeżeli} \quad x \in \overline{A}(X).$$

Jeśli $x \,\underline{\in}_A\, X$ możemy powiedzieć, że „x pewnie należy do X w A" oraz jeśli $x \,\overline{\in}_A\, X$ znaczy, że „x prawdopodobnie należy do X w A".

$\underline{A}(X)$ jest maksymalnym A-rozróżnialnym zbiorem zawartym w X oraz $\overline{A}(X)$ jest minimalnym A-rozróżnialnym zbiorem zawierającym X. Inaczej mówiąc, $\underline{A}(X)$ jest podzbiorem wszystkich zbiorów z tą samą silną przynależnością, natomiast $\overline{A}(X)$ jest sumą wszystkich zbiorów z taką samą słabą przynależnością (rys. 1).



Rys. 1. Ilustracja zbioru przybliżonego [5]

Można łatwo sprawdzić, że przestrzeń aproksymacji $A = (U, R)$ determinuje niepowtarzalną przestrzeń topologiczną $T_A = (U \, \mathrm{Com}(A))$ a Com(A) jest rodziną wszystkich otwartych zbiorów w T_A. Rodzina wszystkich elementarnych zbiorów w T_A jest podstawą dla T_A. Z definicji dolnej i górnej aproksymacji w A wynika, że Com(A) jest równocześnie zbiorem wszystkich otwartych i domkniętych zbiorów w T_A oraz $\underline{A}(X)$ i $\overline{A}(X)$ są wnętrzem i domknięciem zbioru X w przestrzeni topologicznej T_A. $\underline{A}(X)$ i $\overline{A}(X)$ mają następujące właściwości:

1) $\underline{A}(X) \subseteq X \subseteq \overline{A}(X)$

2) $\underline{A}(U) = \overline{A}(U) = U$ było $A(U) = A(U) = U$

3) $\underline{A}(0) = \overline{A}(0) = 0$ było $A(0) = A(0) = 0$

4) $\overline{A}(X \cup Y) = \overline{A}(X) \cup \overline{A}(Y)$ było $\overline{A}(X \cup Y) = \overline{A}(X) \cup A(Y)$

5) $\underline{A}(X \cup Y) \supseteq \underline{A}(X) \cup \underline{A}(Y)$ było $\underline{A}(X \cup Y) \supseteq A(X) \cup A(Y)$

6) $\overline{A}(X \cap Y) \subseteq \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$ było $\overline{A}(X \cap Y) \subseteq A\, X \cap A\, Y$

7) $\underline{A}(X \cap Y) = \underline{A}(X) \cap \underline{A}(Y)$

8) $\overline{A}(-X) = -\underline{A}(X)$

9) $\underline{A}(-X) = -\overline{A}(X)$

10) $\underline{A}\,\underline{A}X = \overline{A}\,\underline{A}X = \underline{A}\,X$ było $\underline{A\,A}\,X = \overline{A}\,\underline{A}X = \underline{A}X$

11) $\overline{A}\,\overline{A}\,X = \underline{A}\,\overline{A}X = \overline{A}X$

Klasyfikacja zbiorów przybliżonych

Niech $A = (U, R)$, R będzie nierozróżnialną relacją w A i $X \subseteq U$ będzie R-nierozróżnialne (zbiór przybliżony w przestrzeni aproksymacji A). Można następująco sklasyfikować zbiory przybliżone:

– zbiór X jest przybliżenie R-rozróżnialny w A, jeżeli $\underline{R}X \neq 0$ i $\overline{R}X \neq U;$

– zbiór X jest zewnętrznie R-nierozróżnialny w A, jeżeli $\underline{R}X \neq 0$ i $\overline{R}X = U;$

– zbiór X jest wewnętrznie R-nierozróżnialny w A, jeżeli $\underline{R}X = 0$ i $\overline{R}X \neq U;$

– zbiór X jest całkowicie R-nierozróżnialny w A, jeżeli $\underline{R}X = 0$ i $\overline{R}X = U;$

Powyższa klasyfikacja opisuje w jaki sposób zbiór obiektów X może zostać rozróżniony w znaczeniu nierozróżnialnej relacji R.

Dokładność, zależność i wpływ

Jeśli X jest dowolnym zbiorem obiektów danej przestrzeni aproksymacji $A = (U, R)$, $X \subseteq U$, to największy dokładny podzbiór R nazywa się wnętrzem X i oznaczany jest symbolem $\underline{R}$. Zbiór X jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swemu wnętrzu. Wnętrze danego zbioru można traktować jako przybliżony opis: stosunek liczebności wnętrza do liczebności całego zbioru nazywany jest dokładnością tego przybliżenia i oznaczany symbolem $\gamma(X)$:

$$\gamma(X) = \frac{\mathrm{card}(\underline{R}X)}{\mathrm{card}(X)}$$

Liczbę $\alpha_R(X)$ nazywamy R-dokładnością (lub dokładnością w zależności od R) zbioru X w A:

$$\alpha_R(X) = \frac{\mathrm{card}\ \underline{R}X}{\mathrm{card}\ \overline{R}X}$$

Szorstkością (bądź chropowatością) zbioru X w A nazywamy dopełnienie R-dokładności do 1:

$$\rho_R(X) = 1 - \alpha_R(X)$$

Oczywiście $0 \leq \alpha_R(X), \rho_R(X) \leq 1$.

Zbiór X jest wyraźnie R-rozróżnialny jeżeli $\underline{R}X = \overline{R}X$, w innym przypadku np. jeżeli $\underline{R}X \neq \overline{R}X$, to zbiór X jest R-nierozróżnialny, bądź przybliżony w zależności od R.

Należy zwrócić uwagę, że $\gamma(X) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem dokładnym. Jeśli $C = (R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$ jest kategoryzacją uniwersum na zbiory niepuste i rozłączne R, to liczba

$$\gamma(C) = \frac{\sum \mathrm{card}(\underline{R}_i X)}{\mathrm{card}(X)}$$

jest dokładnością (lub stopniem dokładności) tej klasyfikacji w przestrzeni aproksymacji (U, R). Podobnie jak poprzednio, klasyfikacja C jest dokładna (tzn. wszystkie klasy R są zbiorami dokładnymi), wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma(C) = 1$.

Pojęcie dokładności kategoryzacji jest oczywiście zrelatywizowane do rozważanego przestrzeni aproksymacji. Obserwacja ta umożliwia wprowadzenie pojęcia zależności między zbiorami atrybutów.

Niech $A = (U, R)$ będzie przestrzenią aproksymacji, a P i Q nierozróżnialną relacją w przestrzeni aproksymacji. Liczba:

$$\gamma_P(Q^*) = \frac{\mathrm{card}\ \mathbf{Int}_P(Q^*)}{\mathrm{card}\ U}, \text{ gdzie } Int_P(Q^*) = \bigcup_{X \in Q^*} \underline{P}X$$

będzie nazywana dokładnością klasyfikacji Q^* w odniesieniu do P (P-dokładność klasyfikacji Q^*). Oczywiście $0 \leq \gamma_P(Q^*) \leq 1$ dla każdego P i Q. Mówimy, że Q zależy w stopniu k od P w przestrzeni aproksymacji A:

$$P \overset{k}{\rightarrow} Q, \text{ jeżeli } k = \gamma_P (Q^*)$$

Jeśli $P \overset{1}{\rightarrow} Q$, to Q całkowicie zależy od P (lub po prostu „zależy"), można to też zapisać $P \rightarrow Q$.

Jeśli 0 < k < 1 oraz $P \overset{k}{\rightarrow} Q$, to Q częściowo zależy od P.

Jeśli $P \overset{0}{\rightarrow} Q$, to Q jest całkowicie niezależne od P.

Niech A i B będą dwoma zbiorami atrybutów określonych na tym samym uniwersum U, a $C(A)$ i $C(B)$ – odpowiednimi kategoryzacjami. Wtedy dokładność klasyfikacji $C(B)$ w przestrzeni aproksymacji (U, R) nazywa się zależnością (albo stopniem zależności) zbioru atrybutów B od zbioru atrybutów A i oznacza symbolem $\gamma(A \rightarrow B)$.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że tak zdefiniowana zależność jest niesymetryczna: może się zdarzyć, że B będzie zależało w niskim stopniu od A, ale A będzie w pełni (tj. w stopniu 1) zależało od B. Warto też podkreślić, że $\gamma(A \rightarrow B) = \gamma(B \rightarrow A) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(A) = C(B)$ – tzn. wtedy, gdy oba zbiory atrybutów określają tę samą kategoryzację obiektów.

Ze względów interpretacyjnych, omówionych poniżej, liczbę $\gamma(B \rightarrow A)$ nazwano wpływem (lub stopniem wpływu) A na B i oznaczono symbolem $w(A \rightarrow B)$:

$$w\ (A \rightarrow B) \overset{\text{def}}{=} \gamma(B \rightarrow A)$$

Wskaźniki zależności i wpływu definiuje się wyłącznie za pomocą kategoryzacji [6]. Dla wartości tych wskaźników nie jest istotne, jakie są atrybuty należące do zbiorów A i B, a jedynie to, jakie są kategoryzacje odpowiadające tym zbiorom. Wynika stąd, że dla dowolnych kategoryzacji C i D tego samego uniwersum U można w analogiczny sposób zdefiniować zależność $\gamma(D \rightarrow C)$ i wpływ $w(C \rightarrow D)$.

Analiza przykładu

Poniżej przedstawiamy własną interpretację przykładu pochodzącego z artykułu Z. Pawlaka [5] zawierającego niekonsekwencje zapisu matematycznego.

Niech $U = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ oraz niech R będzie nierozróżnialną relacją z następującymi ekwiwalentnymi klasami:

$$E_1 = \{x_0, x_1\}, E_2 = \{x_2, x_6, x_9\}, E_3 = \{x_3, x_5\}, E_4 = \{x_4, x_8\}, E_5 = \{x_7, x_{10}\}.$$

Zbiory:

$$X_1 = \{x_0, x_1, x_4, x_8\},$$
$$Y_1 = \{x_3, x_5, x_7, x_8\},$$
$$Z_1 = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\}$$

są przykładami R-rozróżnialnych zbiorów.

Zbiory:

$$X_2 = \{x_0, x_3, x_4, x_5, x_8, x_{10}\},$$
$$Y_2 = \{x_1, x_7, x_8, x_{10}\},$$
$$Z_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_8\}$$

są przykładami przybliżonych R-rozróżnialnych zbiorów. Analogiczne przybliżenia granic i dokładności wynoszą:

$$\underline{R}\, X_2 = E_3 \cup E_4 = \{x_3, x_4, x_5, x_8\},$$
$$\overline{R}\, X_2 = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\},$$
$$B\, n_R (X_2) = E_1 = \{x_0, x_1\},$$
$$\alpha_R (X_2) = 4/8 = 1/2$$
$$\underline{R}\, Y_2 = E_5 = \{x_7, x_{10}\},$$
$$\overline{R}\, Y_2 = E_1 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_4, x_7, x_8, x_{10}\},$$
$$B\, n_R (Y_2) = E_4 \cup E_5 = \{x_4, x_7, x_8, x_{10}\},$$
$$\alpha_R (Y_2) = 2/6 = 1/3,$$
$$\underline{R}\, Z_2 = E_4 = \{x_4, x_8\},$$
$$\overline{R}\, Z_2 = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\},$$
$$B\, n_R (Z_2) = E_2 \cup E_3 = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\},$$
$$\alpha_R (Z_2) = 2/7.$$

Zbiory:

$$X_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\},$$
$$Y_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$Z_3 = \{x_0, x_2, x_3, x_4, x_8, x_{10}\}$$

są przykładami zewnętrznie R-nierozróżnialnych zbiorów. Odpowiednie przybliżenia granic i dokładności są równe:

$$\underline{R}\, X_3 = E_1 = \{x_0, x_1\},$$
$$\overline{R}\, X_3 = U,$$
$$B\, n_R (X_3) = E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\alpha_R (X_3) = 2/10 = 1/5$$
$$\underline{R}\, Y_3 = E_2 = \{x_2, x_6, x_9\},$$
$$\overline{R}\, Y_3 = U,$$
$$B\, n_R (Y_3) = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\},$$
$$\alpha_R (Y_3) = 3/10,$$
$$\underline{R}\, Z_3 = E_4 = \{x_4, x_8\},$$
$$\overline{R}\, Z_3 = U,$$
$$B\, n_R (Z_3) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}\},$$
$$\alpha_R (Z_3) = 2/10 = 1/5.$$

Zbiory:

$$X_4 = \{x_0, x_2, x_3\},$$
$$Y_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_7\},$$
$$Z_4 = \{x_2, x_3, x_4\}$$

są przykładami wewnętrznie R-nierozróżnialnych zbiorów.

Poniżej przedstawiono górne aproksymacje tych zbiorów:

$$\overline{R}\, X_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\},$$
$$\overline{R}\, Y_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\overline{R}\, Z_4 = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\},$$

Oczywiście dolne przybliżenie tych zbiorów jest zbiorem pustym i dokładność jest równa zero. Poniżej przedstawiono przykłady zbiorów całkowicie R-nierozróżnialnych:

$$X_5 = \{x_0, x_2, x_3, x_4, x_7\},$$
$$Y_5 = \{x_1, x_5, x_6, x_8, x_{10}\},$$
$$Z_5 = \{x_0, x_2, x_5, x_8\}$$

Wnioski z analizy przykładu

Z braku miejsca nie przytaczamy w całości oryginału tylko przykładowe rozbieżności.

W oryginale jest: $\overline{R}\, X_2 = E_1 \cup E_3$ Č $E_4 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$, natomiast w wyniku naszej analizy otrzymujemy $\overline{R}\, X_2 = E_1 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$.

W oryginale jest: $B\, n_R\,(Y_2) = E_1 \cup E_4 = \{x_4, x_7, x_8, x_{10}\}$, natomiast w wyniku naszej analizy otrzymujemy $B\, n_R\,(Y_2) = E_4 \cup E_5 = \{x_4, x_7, x_8, x_{10}\}$.

W oryginale jest: $\overline{R}\, Y_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_7 = \{x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, natomiast w wyniku naszej analizy otrzymujemy $\overline{R}\, Y_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_5 = \{x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$.

ZBIORY ROZMYTE

W tej części przedstawiono definicję zbiorów rozmytych wprowadzoną przez Zadeha w 1965 r. [3] na podstawie artykułu Z. Pawlaka [7]. W związku z rozbieżnościami opisu matematycznego teorii zbiorów rozmytych występujących w dostępnej literaturze autorzy przedstawiają poniżej własną interpretację pozbawioną nieścisłości matematycznych.

Niech U będzie zbiorem zwanym uniwersum. Zbiór rozmyty X w U jest funkcją przynależności $\mu_X(x)$, której każdy element $x \in U$ należy do liczb całkowitych z przedziału <0, 1> i $\mu_X(x)$ określa stopień przynależności x do zbioru X.

Alternatywa i koniunkcja zbiorów rozmytych X i Y są zdefiniowane następująco:

$$\mu_{X \cup Y}(x) = \mathrm{Max}\,(\mu_X(x),\ \mu_Y(x))$$

$$\mu_{X \cap Y}(x) = \mathrm{Min}\,(\mu_X(x),\ \mu_Y(x))$$

dla każdego $x \in U$.

Dopełnienie $-X$ zbioru rozmytego X jest zdefiniowane funkcją przynależności

$$\mu_{-X}(x) = 1 - \mu_X(x) \quad \text{dla każdego } x \in U.$$

PRZYBLIŻONA FUNKCJA PRZYNALEŻNOŚCI

Powstaje pytanie – kiedy możemy zamienić koncepcję aproksymacji przez funkcję przynależności podobną do tej zaproponowanej przez Zadeha? [3].

Niech $X \subseteq U$. Funkcję przynależności definiujemy następująco:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x \in \underline{A}\,(X) \\ 1/2 & \text{jeżeli } x \in Fr_{\underline{A}}(X) \\ 0 & \text{jeżeli } x \in -\overline{A}\,(X) \end{cases}$$

gdzie $-X$ oznacza $U - X$.

Do tak określonej funkcji przynależności nie można zastosować alternatywy i koniunkcji zbiorów przedstawionej uprzednio, ponieważ:

$$m_{X \cup Y}(x) \neq \mathrm{Max}\,(\mu_X(x),\ \mu_Y(x)) \qquad \text{(a)}$$

$$m_{X \cap Y}(x) \neq \mathrm{Min}\,(\mu_X(x),\ \mu_Y(x)) \qquad \text{(b)}$$

Ad. a) $\mu_{X \cup Y}(x) = 1 \equiv \mathrm{Max}\,(\mu_X(x), \mu_Y(x)) = 1 \equiv \mu_X(x) = 1$ lub $\mu_Y(x) = 1 \equiv$ (1)

$$\equiv x \in \underline{A}\,(X) \text{ lub } x \in \underline{A}\,(Y) \equiv x \in \underline{A}\,(X) \cup \underline{A}\,(Y)$$

Z definicji funkcji przynależności dla alternatywy zbiorów otrzymujemy:

$$m_{X \cup Y}(x) = 1 \equiv x \in \underline{A}\,(X \cup Y) \qquad (2)$$

Z właściwości wewnętrznej operacji otrzymujemy

$$\underline{A}\,(X \cup Y) \supseteq \underline{A}\,(X) \cup \underline{A}\,(Y) \qquad (3)$$

W ten sposób $x \in W = \underline{A}\,(X \cup Y) - (\underline{A}\,(X) \cup \underline{A}\,(Y))$, $\mu_{X \cup Y}(x) \neq 1$ z uwzględnieniem (1) i $\mu_{X \cup Y}(x) = 1$ zgodnie z (2) (sprzeczność).

Ad. b) $\mu_{X\cap Y}(x) = 0 \equiv \mathrm{Min}\,(\mu_X(x), \mu_Y(x)) = 0 \equiv \mu_X(x) = 0$ lub $\mu_Y(x) = 0 \equiv$ (4)

$$\equiv x \in -\overline{A}(X) \text{ lub } x \in -\overline{A}(Y) \equiv x \in -\overline{A}(X) \cup -\overline{A}(Y) \equiv x \in -(\overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y))$$

Z definicji funkcji przynależności koniunkcji zbiorów mamy:

$$m_{X\cap Y}(x) = 0 \equiv x \in -\overline{A}(X \cap Y) \tag{5}$$

Z własności domknięcia działania mamy:

$$\overline{A}(X \cap Y) \subseteq \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y) \tag{6}$$

i w rezultacie otrzymujemy:

$$-(\overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)) \subseteq -\overline{A}(X \cap Y) \tag{7}$$

W ten sposób $x \in W = -\overline{A}(X \cap Y) - (-(\overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)))$; $\mu_{X\cap Y}(x) \neq 0$ zgodnie z (4) i $m_{X\cap Y}(x) = 0$ zgodnie z (5) (sprzeczność).

Oznacza to, że funkcja przynależności przedstawiona w tym punkcie nie może być rozciągnięta na alternatywę i koniunkcję zbiorów.

UZUPEŁNIENIE ZBIORÓW

Funkcja przynależności dla uzupełnienia zbiorów jest taka sama dla zbiorów rozmytych i przybliżonych:

a) $\mu_{-X}(x) = 1 \equiv x \in \underline{A}(-X) \equiv x \in -\overline{A}(X) \equiv \mu_X(x) = 0 \equiv 1 - \mu_X(x) = 1$

b) $\mu_{-X}(x) = 0 \equiv x \in -\overline{A}(-X) \equiv x \in \underline{A}(X) \equiv \mu_X(x) = 1 \equiv 1 - \mu_X(x) = 0$

c) $\mu_{-X}(x) = 1/2 = x \in \overline{A}(-X) - \underline{A}(-X) \equiv x \in \overline{A}(-X) \cap (-\underline{A}(-X)) \equiv$

$$\equiv x \in \overline{A}(-X) \cap \overline{A}(X) \equiv x \in \overline{A}(X) \cap (-\underline{A}(X)) \equiv x \in \overline{A}(X) - \underline{A}(X) \equiv$$

$$\equiv \mu_X(x) = 1/2 = 1 - \mu_X(x) = 1/2$$

PODUMOWANIE I WNIOSKI

Teoria zbiorów przybliżonych nie może zostać zredukowana do teorii zbiorów rozmytych przez wprowadzenie funkcji przynależności wyrażającej stopień przynależności. Udowodnienie tej tezy wymaga jednak konsekwentnego stosowania jednolitej notacji matematycznej. Autorzy artykułu napotkali liczne przykłady nieścisłości występujących w literaturze tematu, szczególnie we wczesnej fazie rozwoju koncepcji zbiorów przybliżonych. Oprócz tego teoria zbiorów przybliżonych jest szersza niż koncepcja logiki rozmytej. Można ją zredukować do zbiorów rozmytych, jeśli zamiast:

$$\underline{A}(X \cup Y) \supseteq \underline{A}(X) \cup \underline{A}(Y) \text{ i } \overline{A}(X \cap Y) \subseteq \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$$

obowiązuje $\underline{A}(X \cup Y) = \underline{A}(X) \cup \underline{A}(Y)$ i $\overline{A}(X \cap Y) = \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$,

co oczywiście w ogólnym przepadku nie jest prawdą.

Faktem jest, że teoria zbiorów przybliżonych prof. Z Pawlaka nie jest tak znana i rozpowszechniona jak pokrewna teoria zbiorów rozmytych. Analiza autorów przeprowadzona z myślą odnalezienia przyczyn tego stanu skłania do wniosku, że we wcześniejszych pracach, a nawet aktualnej literaturze, występuje:

1. rozbieżność w nazewnictwie, np. prof. M. Materska nazywa zbiory przybliżone zbiorami zgrzebnymi;
2. rozbieżność oznaczania,

   np. $\gamma_P(Q^*) - \dfrac{\text{card } \mathbf{Int}_P(Q^*)}{\text{card } U}$ lub $\gamma(Y) = \dfrac{\text{card } (Y)}{\text{card } (Y)}$ lub $\alpha_R(X) = \dfrac{\text{card } \underline{R}X}{\text{card } \overline{R}X}$;
3. rozbieżność pojęć, np. $A = (U, R)$, $X \subseteq U$ lub $A = (U, Ind)$ lub (X, A), $Y \subseteq X$, gdzie $X = U$.

Wymienione nieścisłości powodują duże trudności z zastosowaniem i rozpowszechnianiu wspomnianych teorii w informatyce oraz komputerowym wspomaganiu w technice i nauczaniu. Można sformułować hipotezę badawczą, że te trudności stanowią zasadniczą przeszkodę także w innych obszarach zastosowań.

LITERATURA

1. Pawlak Z. 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(5): 341–356.
2. Orłowska E., Pawlak Z. 1984. Expressive Power of Knowledge Representation. International Journal of Man-Machine Studies.
3. Zadeh L.A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8: 338–353.
4. Pedrycz W. 1998. Computational intelligence, An introduction. CRC Press, New York.
5. Pawlak Z. 1988. Zbiory przybliżone i systemy informacyjne. Podstawy Sterowania, tom 18, zeszyt 3-4, PWN, Warszawa-Wrocław: 175–201.
6. Materska M. 1994: Z badań nad ocenianiem profesjonalnym czyli jak mierzona jest niewymierna wartość szkolnych wypracowań? Wydawnictwo Instytutu Psychologii PAN, Warszawa.
7. Pawlak Z. 1984. Rough sets and fuzzy sets. Prace IPI PAN, ss.540, Warszawa.

ANALYSIS OF ROUGH SETS CONCEPTS

Summary

We describe our interpretation of rough sets mathematical foundations theory on basis Z. Pawlak works. We cite famous Z. Pawlak outcome, that the idea of rough set cannot be reduced to the idea of fuzzy set by introducing membership function expressing the grade of membership. There are some problems which could be solved only in rough sets but not in fuzzy sets. Finally we describe the problem with application rough sets theory based on Z. Pawlak works.