

Oleg Draczew¹, Antoni Świć²,
Wiktor Taranenko², Georgij Taranenko³

MODELOWANIE UKŁADU DYNAMICZNEGO OBRÓBK CIEPLNO-MECHANICZNEJ WAŁÓW O MAŁEJ SZTYWNOŚCI

Streszczenie. W artykule rozpatrzono metodologię opracowania modeli matematycznych obróbki cieplno-mechanicznej wałów małej sztywności. Przedstawiono analizę modeli sterowania: odkształceniami sprężysto-plastycznymi, niezmiennością obciążeń zewnętrznych i procesów zdejmowania obciążeń. Do analizy jakościowej procesów opracowano modele matematyczne układu dynamicznego obróbki cieplno-mechanicznej wałów o małej sztywności. Przedstawiono proste modele trzelementowe, opisujące tylko naprężenia i odkształcenia. Przeanalizowano również bardziej złożone modele matematyczne, opisujące niesprężyste ciała sztywne.

Słowa kluczowe: modelowanie, układ dynamiczny, wały o małej sztywności, obróbka cieplno-mechaniczna

WSTĘP

W wielu współczesnych agregatach, maszynach i przyrządach są stosowane bardzo dokładne części o małej sztywności. Ciągły wzrost ich ilości jest spowodowany zwiększaniem się produkcji maszyn precyzyjnych, możliwej dzięki doskonaleniu metod obliczeń wytrzymałościowych, optymalizacji kształtu części i konstrukcji oraz obniżaniu ilości materiału potrzebnego do wytworzenia części.

Analiza doświadczeń przemysłowych wytwarzania takich elementów w produkcji małoseryjnej i seryjnej pokazała, że tradycyjne sposoby obróbki części sztywnych są mało efektywne przy wytwarzaniu wyrobów o małej sztywności, dlatego w praktyce przy ich obróbce są zaniżane parametry obróbki oraz stosowane jest docieranie ręczne. Prowadzi to do zwiększenia pracochłonności obróbki, nie gwarantuje przy tym wymaganej jakości wyrobów [4].

Paczenie się części o małej sztywności jest uzależnione od naprężeń szczytkowych, powstających w wyniku odkształceń plastycznych o różnej wielkości przy obciążeniu półfabrykatu. W trakcie walcowania półfabrykatów o dużej długości można wyodręb-

1) Państwowy Uniwersytet Techniczny w Togliatti, Rosja.

2) Instytut Technologicznych Systemów Informacyjnych, Politechnika Lubelska.

3) Narodowy Uniwersytet Techniczny w Sewastopolu, Ukraina.

nić dwie przyczyny powstawania naprężeń szczątkowych: nierównomierność odkształceń plastycznych metalu przy jego zgnioście i niejednorodność pola temperaturowego podczas chłodzenia.

Poziom naprężeń szczątkowych w częściach o małej sztywności, w zależności od właściwości fizyko-mechanicznych, może zostać obniżony w wyniku zastosowania: odkształceń plastycznych, wyżarzania, odpuszczania [1, 2]. Jednym ze sposobów umożliwiających zachowanie niezmienności kształtu jest obróbka cieplna przy ustalonym na sztywno położeniu półfabrykatu; w trakcie obróbki cieplnej bez takiego ustalenia (na przykład przy odpuszczaniu) praktycznie prawie zawsze zmiany ulegają wymiary części. Złożony stan mechaniczny materiału w trakcie obróbki cieplnej wyrobów, w których naprężenia mają duże wartości, w połączeniu z różnorodnością występujących stanów fazowych, może spowodować zmianę wymiarów przedmiotu w trakcie kolejnych operacji obróbki mechanicznej lub składowania. Paczenie w stanie swobodnym ma miejsce również po obróbce cieplnej, przed zakończeniem procesu przekształceń fazowych i odkształceń niesprężystych. Ustalenie wyrobu przy hartowaniu także charakteryzuje się określoną specyfiką. W przypadku, kiedy ustalenie wyrobu hartowanego trwa dosyć długo, odkształcenia są niewielkie (1–2% wielkości odkształcenia plastycznego powstającego przy obciążeniu). Odpuszczanie realizowane po hartowaniu, w szczególności przy występowaniu austenitu szczątkowego, jeżeli w materiale zachodzą przekształcenia fazowe (na przykład około 10%), powiększa w nieco większym stopniu działania wtórne, które sumują się z poprzednimi (w tych samych kierunkach).

ANALIZA TEORETYCZNA PROCESÓW OBRÓBK CIEPLNO-MECHANICZNEJ

W przypadku dowolnego odkształcenia, naprężenia i odkształcenia powinny być przedstawione w postaci tensorów drugiego rzędu i wtedy prawo Hooke'a ulega przekształceniu do układu równań liniowych, wyrażających każdą składową tensora naprężeń przez składową tensora odkształcenia i odwrotnie. W danym przypadku to uogólnienie doprowadziłoby tylko do niepotrzebnej komplikacji zagadnienia, dlatego oparto się na prawie Hooke'a, określonego zależnością:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

lub
$$\varepsilon = j \cdot \sigma,$$

gdzie: $E = 1 / j,$

j – współczynnik podatności mm^2/N .

Zakłada się, że w tym przypadku występuje odkształcenie postaciowe lub odkształcenie w jednej osi. Brak sprężystości materiału można określić trzema warunkami: każdej wartości naprężenia odpowiada jedna równoważna wartość odkształcenia lub

odwrotnie; równowazna wartość wyjściowej wielkości uzyskiwana jest tylko po upływie odpowiedniego czasu – równowaga osiągana jest w zakresie od mikrosekund do bardzo dużych odcinków czasu; związek między odkształceniem i naprężeniem jest liniowy. Warunki pierwszy i trzeci – to powtórzenie warunków sprężystości idealnej.

W proponowanym sformułowaniu zagadnienia sens liniowości jest następujący: jeżeli zmiana naprężenia w czasie $\sigma_1(t)$ prowadzi do odkształcenia $\varepsilon_1(t)$ i jeżeli naprężenie $\sigma_2(t)$ prowadzi do odkształcenia $\varepsilon_2(t)$, to $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ powoduje odkształcenie $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$.

Układ termodynamiczny, w przypadku szeregu nieskończenie małych zmian parametru zewnętrznego, może przyjmować wiele stanów równowaznych. Pierwszemu warunkowi niesprężystości, zawierającemu wymagania jednoznaczności równowaznego stosunku między naprężeniami i odkształceniem, w związku z pełną zdolnością do odbudowy, odpowiadają więc wszystkie materiały, spełniające wymagania termodynamicznego ciała sztywnego. Drugi warunek niesprężystości oznacza, że jeżeli ulegnie zmianie naprężenie mechaniczne, to ustalenie równowagi w materiale niesprężystym wymaga pewnego czasu.

Przechodzenie układu termodynamicznego do nowego stanu równowagi, w odpowiedzi na zmianę parametru wejściowego, nazywa się relaksacją. Jeżeli oddziaływaniem wejściowym jest naprężenie, to relaksacja jest zależnym od czasu ustaleniem stanu wartości równowaznej parametru wyjściowego – odkształcenia (lub odwrotnie). Zewnętrznym przejawem relaksacji jest osiągnięcie przez parametry wewnętrzne nowych wartości równowaznych. Z punktu widzenia teorii regulacji automatycznej parametry wewnętrzne układu wpływają na stronę ilościową procesu przejściowego – uważa się, że relaksacja jest procesem przejściowym. Między σ i ε istnieje nie tylko bezpośrednie powiązanie czysto sprężyste, ale również powiązanie pośrednie poprzez parametr wewnętrzny. W miarę relaksacji parametru wewnętrznego do wartości równowagi, odkształcenie ε dąży również do odpowiedniej wartości nie momentalnie, lecz z określoną prędkością (zmiana momentalna odpowiada przypadkowi sprężystości w postaci czystej).

Relaksacja jest w istocie właściwością termodynamiczną, uwarunkowaną powiązaniem σ i ε , z określonymi parametrami wewnętrznymi, które mogą ulegać zmianie do wartości równowagi w wyniku procesów kinetycznych (na przykład dyfuzji). Zewnętrznym przejawem takiej relaksacji wewnętrznej są zależne od czasu właściwości dotyczące odkształcania.

Paczenie półfabrykatu jest funkcjonalnie powiązane z niejednorodnością odkształcenia plastycznego i pola temperaturowego oraz różnym charakterem odkształceń plastycznych i sprężystych przy zdejmowaniu obciążenia. Analogiczny proces zachodzi także z naprężeniami szczałkowymi, ponieważ ich relaksacja zaczyna się niejednocześnie i w różnych częściach wyrobu, zarówno w przekroju poprzecznym, jak i wzdłużnym.

MODELE MATEMATYCZNE PROCESÓW OBRÓBK CIEPLNO-MECHANICZNEJ

Opracowane sposoby osiągania niezmienności kształtu geometrycznego części o małej sztywności [1, 5] bazują na odkształceniu osiowym przy odpuszczaniu – sterowaniu nim przy nagrzewaniu i odpuszczaniu. Celowe jest więc rozpatrzenie trzech modeli sterowania: odkształceniem sprężysto-plastycznym; stabilizacją obciążeń zewnętrznych i procesem zdejmowania obciążenia. Taki umowny podział jest poprawny w przypadku rozpatrywania modelu prętowego, kiedy analizowane są naprężenia pierwszego rzędu.

W modelu pierwszym naprężenia $\sigma(t)$ i odkształcenia $\varepsilon(t)$ ulegają zmianie w czasie; sterowanie jest realizowane według dwóch parametrów σ i T° , jest kontrolowana wielkość wyjściowa $\varepsilon(t)$; w drugim $\sigma = const$ (podtrzymuje system sterowania automatycznego), zmianie ulega $\varepsilon(t)$; w modelu trzecim naprężenie σ jest utrzymywane na stałym poziomie, sterowanie jest realizowane według parametru $\varepsilon(t)$ z uwzględnieniem zmiany temperatury stygnięcia T° .

Do jakościowego zbadania procesów, są niezbędne równania opisujące układ dynamiczny obróbki cieplno-mechanicznej, jako obiekt sterowania.

W danym przypadku zastosowano znaną metodykę [10, 11] podziału obiektu na człony dynamiczne (tab. 1).

W celu scharakteryzowania stanu członu dynamicznego, jako współrzędną uogólnioną na wejściu członu przyjęto $\sigma_1(\varepsilon)$, a na wyjściu $\varepsilon_1(\sigma)$, i określono je odpowiednio jako wejściowa i wyjściowa wielość członu o działaniu ukierunkowanym.

Proces odkształcenia sprężysto-plastycznego można przedstawić członem o działaniu ukierunkowanym z wielkością wyjściową σ oraz wyjściową ε i odwrotnie, w zależności od tego, czy jest rozpatrywana relaksacja naprężeń czy też podatności.

Eksperymentalne charakterystyki statyczne (zależność wielkości wyjściowej ε członu od wejściowej σ w ustalonym trybie) przedstawiono na rysunku 1.

Istotne jest, że człon dynamiczny niekoniecznie jest przedstawiony w postaci konstrukcyjnej lub schematycznej. W niektórych przypadkach człony dynamiczne w ogóle mogą nie mieć sensu fizycznego, charakteryzując tylko zależności matematyczne pomiędzy niektórymi wielkościami układu automatycznego i obiektu.

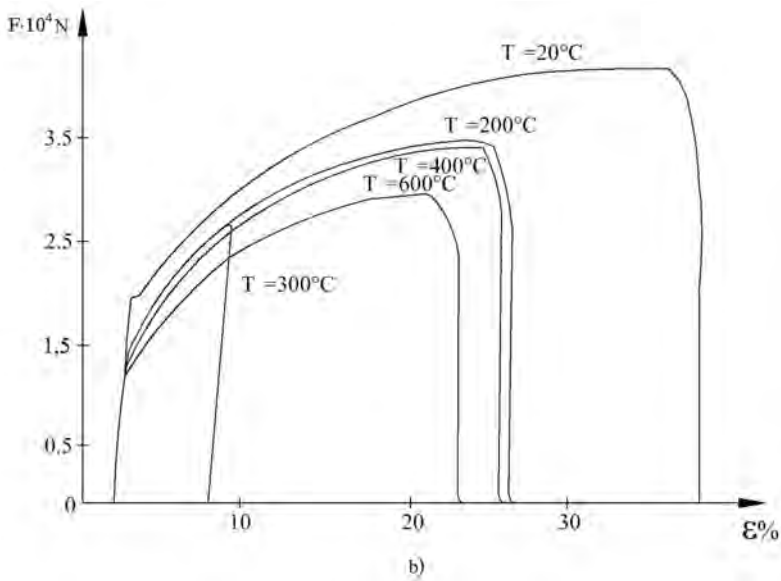
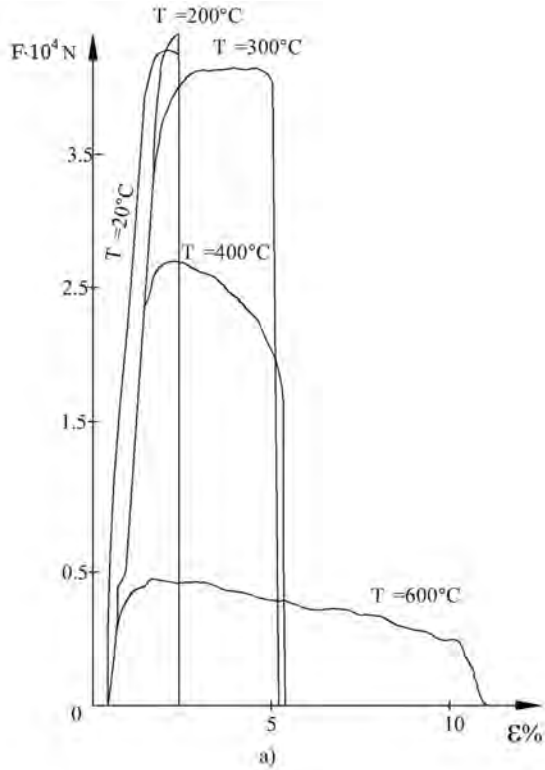
Rodzinę charakterystyk statycznych, zbudowanych w przypadku różnych wartości temperatury T , przedstawiono na rysunku 1.

Modelami przedstawionych charakterystyk statycznych są zależności nieliniowe, które przy realizacji układu sterowania automatycznego są linearyzowane, co umożliwia uproszczenie układu sterowania automatycznego, nie powodując obniżenia wymagań odnośnie dynamiki procesów obróbki cieplno-mechanicznej.

Charakterystyki statyczne w pełni odzwierciedlają zachowanie członu dynamicznego w trybie ustalonym, umożliwia to opracowanie zasad sterowania odkształceniem sprężysto-plastycznym.

Tabela 1. Człony dynamiczne i ich opis matematyczny
Table 1. The dynamic elements and their mathematical description

	Model mechaniczny	Opis matematyczny	Proces przejściowy	Transmitacje operatorowe
1.		$\sigma = E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon}$ $T\dot{\varepsilon} + \varepsilon = K\sigma_{wej}$ $\sigma = \sigma_0 / E(1 - e^{-t/T})$		$G(S) = \varepsilon(S) / \sigma(S) = K / (TS + 1)$
2.		$\dot{\varepsilon} = \sigma / \beta + \dot{\sigma} / E$ $T\sigma + \sigma = K\dot{\varepsilon}$ $\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-t/T}$		$G(S) = \sigma(S) / \varepsilon(S) = K / (TS + 1)$
3.		$E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon} = (1 + E/E_2)\sigma + (\beta/E_1)\dot{\sigma}$ $T_1\dot{\varepsilon} + \varepsilon = T_2\dot{\sigma} + K\sigma$ $\sigma = \varepsilon_0(E_1 + (E_1 E_2))e^{-t(E_1 + E_2)/\beta}$		$G(S) = \varepsilon(S) / \sigma(S) = \frac{K(T_2 S + 1)}{(T_1 S + 1)}$
4.		$\sigma < \sigma_T \quad \sigma \geq \sigma_T$ $\sigma = \varepsilon\sigma \quad \sigma = \sigma_{wyj}$ $\sigma = K\varepsilon_{wej} \quad \varepsilon_{wej} \geq \sigma_T E$		$G(S) = \varepsilon(S) / \sigma(S) = K = 1/E$ przy $\sigma < \sigma_T$
5.		$\sigma \geq \sigma_T \quad \sigma = \sigma_T + \beta\dot{\varepsilon}$ $\sigma \leq \sigma_T \quad \sigma / \beta = \dot{\varepsilon}$ $\sigma = \sigma_0 > \sigma_T \quad \dot{\varepsilon} = K(\sigma_0 - \sigma_T)$ $S\varepsilon_{wyj} = K\sigma_{wyj}$		$G(S) = \varepsilon(S) / \sigma(S) = -K/S$
6.		$\varepsilon = \alpha \cdot L T_{wej}$ $(TS + 1)\varepsilon = KT_{wej}$ $T = C \cdot Q / K \cdot F$		$G(S) = \varepsilon(S) / T(S) = K = \alpha \cdot L$ $G(S) = K / (TS + 1)$
		$\sigma = \alpha \cdot E T > \sigma_T$ $T = \sigma_T / E\alpha$		$G(S) = \sigma(S) / T(S) = \alpha \cdot E$



Rys. 1. Charakterystyki statyczne układu dynamicznego obróbki cieplno-mechanicznej
Fig. 1. The static characteristics of thermo-mechanical processing dynamic system

Układ sterowania działa również w trybie nieustalonym, a więc ważne jest przy badaniu układu dynamicznego obróbki cieplno-mechanicznej zachowanie członów dynamicznych, w trakcie procesów przejściowych.

Charakterystyki statyczne obiektu sterowania nie zawierają czasu relaksacji, co jest przeszkodą w opracowaniu urządzenia i regulowaniu procesu obróbki cieplno-mechanicznej.

Opis powinien być realizowany na podstawie układu parametrów, który można rozpatrywać jako właściwość samego materiału. Przy takim podejściu, jest istotny stosunek między naprężeniem i odkształceniem, zapisany w postaci równania różniczkowego, zawierającego naprężenie, odkształcenie i ich pochodne po czasie. Równania różniczkowe opisujące odkształcenia zawierają trzy parametry niezależne, a więc model jest budowany z trzech podstawowych elementów – dwóch sprężyn i tłumika.

Określenie niesprężystości zawiera wymóg liniowości. Równania różniczkowe opisujące niesprężystość, wiążące σ i ε , powinny być więc równaniami pierwszego rzędu i zawierać tyle niezależnych stałych, ile jest niezbędnych do opisu niesprężystego zachowania danego ciała sztywnego. W ogólnej postaci równanie liniowe ze stałymi współczynnikami można zapisać w sposób następujący:

$$a_0 \cdot \sigma + a_1 \cdot d\sigma / dt + \dots + a_n \cdot d^n \sigma / dt^n = b_0 \cdot \varepsilon + b_1 \cdot d\varepsilon / dt + \dots + b_n \cdot d^n \varepsilon / dt^n \quad (1)$$

lub
$$A\sigma = B\varepsilon,$$

gdzie A i B – operatory liniowe zawierające odpowiednie współczynniki a_i i b_i .

Układ mechaniczny może być modelem określonego materiału niesprężystego wtedy, gdy spełnia te same zależności między siłą, przemieszczeniem i czasem, co odpowiednio naprężenia, odkształcenia i czas w przypadku materiału niesprężystego. Siła działająca na sprężynę odzwierciedla naprężenie, przemieszczenie – odkształcenie, a współczynnik sztywności sprężyny K – odpowiada modułowi sprężystości E lub podatności j . Cechą charakterystyczną takiej sprężyny jest nagromadzona w niej energia odwracalna. Innym elementem niezbędnym do występowania tarcia wewnętrznego jest tłumik Newtona, który jest tłokiem przemieszczającym się w idealnie lepkiej cieczy, prędkość ruchu tłoka jest proporcjonalna do działającej siły, a więc praca w pełni jest zużywana na powstawanie ciepła. W przypadku takich ciał sztywnych tłumik stosowany jest tylko w połączeniu ze sprężyną.

W trakcie konstruowania modeli elementy mechaniczne mogą być łączone szeregowo i równolegle [3]. Przy łączeniu szeregowym (tab. 1, model 2) naprężenia σ_1 i σ_2 są równe, a odkształcenia się sumują: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Przy połączeniu równoległym tych elementów $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Kombinacje modeli różnorodnych połączeń z dwóch i trzech elementów są przedstawione w tabeli 1.

Model 1 posiada inercyjność jako wynik podatności i oddziaływania sprężystego. Do opisu ilościowego należy wyprowadzić, a następnie rozwiązać równanie różniczkowe

kowe odkształcenia, odpowiadające przytoczonemu modelowi. Stosując zasadę równoległo-szeregowego połączenia elementów modelu mechanicznego, odkształcenie sprężyny przyjęto: $\varepsilon_1 = \varphi \cdot \sigma_1 = \sigma_1 / E$, a tłumika $\varepsilon_2 = j \cdot \sigma_2 / E \cdot T$. Eliminując ε_1 , ε_2 , σ_1 i σ_2 , otrzymano równanie (tab. 1, model 1). Rozwiązując to równanie, uzyskano funkcję podatności. Proponowany model nie dopuszcza odkształcenia momentalnego, to znaczy nie odzwierciedla on rzeczywistego zachowania ciała sztywnego, w momencie $t = 0$, nie można wytworzyć odkształcenia ε_0 i opisać relaksacji naprężenia. Jednak w połączeniu z innymi elementami model ten także znajduje zastosowanie.

Przy połączeniu szeregowym sprężyny i tłumika (tab. 1, model 2) dobrze jest przedstawić lepkość β wielkością $E \cdot T$ (gdzie T – stała czasu). Rozpatrzony model umożliwia opisanie praktycznie pełnej relaksacji σ do wartości σ_2 , równych zero.

Uogólnione równanie odkształceń, odpowiadające temu modelowi, można otrzymać zakładając $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ oraz $s_2 = E \cdot T \cdot \varepsilon_2$ (tab. 1, model 2). Równanie w przypadku tych dwóch modeli jest ekwiwalentne równaniu (1) wtedy, gdy wszystkie współczynniki oprócz a_0 , a_1 i b_0 , b_1 są równe zero oraz obie części pierwszego równania podzielone są przez b_0 , a drugiego przez a_0 .

Z równania model 2 (tab. 1) wynika, że również drugi model – szeregowo połączone tłumik i sprężyna – opisują materiał niesprężysty, ponieważ umożliwia on określenie stacjonarnej podatności ciągliwości. Należy więc rozpatrzeć model składający się z trzech elementów. Model trzejelementowy jest przedstawiony w tabeli 1 (model 3). Ma on wszystkie specyficzne cechy charakterystyczne materiału niesprężystego; w tym przypadku odkształcenie na jednostkę naprężenia zmienia się od chwilowej wartości j do ostatecznej wartości podatności $j_{\Sigma} = j_1 + j_2$. W oparciu o ten model jest możliwe opisanie relaksacji naprężenia, ponieważ zaczynając z momentu $t = 0$, można w nim podtrzymywać odkształcenie ε_0 ; w tym przypadku początkowo rozciągany jest tylko element – sprężyna 1, a następnie zaczyna się przemieszczać tłok tłumika 3, dopóty, dopóki naprężenie σ_3 , działające na tłumik (naprężenie na tłumiku), nie osiągnie wartości zero. Przemieszczenie to wpływa na zmniejszenie naprężenia od wartości początkowej ε_0 / j_1 do wartości końcowej $\varepsilon_0 / (j_1 + j_2)$.

Rozpatrywany model jest prosty, posiada jednak wszystkie charakterystyki materiału niesprężystego. Równanie różniczkowe opisujące taki model i jego rozwiązanie przedstawiono w tabeli 1 – model 3. W przypadku elementów 1 – 3: $\varepsilon_1 = j \cdot \sigma_1$, $\varepsilon_2 = j \cdot \sigma_2$, $\varepsilon_3 = j \cdot \sigma_3$. Warunki początkowe przy rozwiązaniu równania są następujące: $\sigma = \sigma_2$, $\sigma = 0$, $t \geq 0$, $\varepsilon = j_1 \cdot \sigma$ przy $t = 0$. Przedstawione równanie różniczkowe trzech elementów modelu jest ekwiwalentne równaniu (1), kiedy wszystkie współczynniki oprócz a_0 , a_1 i b_0 , b_1 są równe zero oraz obie części równania są podzielone przez b_0 . Można oczekiwać, że dowolny bardziej złożony model 3-elementowy uwzględnia w równaniu różniczkowym odkształcenia pochodne wyższych rzędów, co komplikuje opis matematyczny obiektu sterowania, nie zmieniając fizycznej istoty procesu. Z rozwiązania równania wynika, że funkcja podatności jest eksponencjalną funkcją rosnącą typu $[1 - \exp(-t / ts)]$, (ts – czas relaksacji przy stałym naprężeniu). Zgodnie z teorią stero-

wania automatycznego, wielkość tę przyjęto nazywać stałą czasową W szczególnie, przy $t = ts$, $j(t)$ ulegnie zwiększeniu o $(1 - e^{-1})$, w stosunku do pełnej zmiany j_2 . Do określenia funkcji relaksacji naprężeń są niezbędne następujące warunki początkowe: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varepsilon = 0$, $t \geq 0$, $\sigma = E \cdot \varepsilon_0$ przy $t = 0$. Dodatkowo wprowadzono oznaczenie $t_\varepsilon = ts(j_1 / j_2 + j_2) = ts(E_2 - t_1) / t_\sigma$, gdzie $\Delta = j_1 / j_2$ stopień relaksacji (wielkość bezwymiarowa). Wartość t_ε jest to czas, niezbędny do zmniejszenia naprężenia o ε razy, czyli t_ε jest czasem relaksacji naprężenia przy stałym odkształceniu. Funkcja relaksacji naprężeń jest eksponentalnie malejącą funkcją typu $\exp \rightarrow (-t / t_\varepsilon)$.

Łącząc kolejno n sprężysto-ciągłych elementów (sprężyna wprowadzona równolegle do tłumika), otrzymano model o takich samych własnościach ogólnych, lecz o znacznie bardziej złożonej zależności procesu odkształcenia od czasu.

Połączenie równoległe n elementów (sprężyna połączona szeregowo z tłumikiem) tworzy model podobny do modelu 2 (tab. 1), lecz lepiej opisujący właściwości relaksacyjne materiałów rzeczywistych, w tym przypadku rozwiązanie równania wygląda następująco:

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \cdot E_m \cdot e^{-t/t_m \varepsilon}, \quad t_m \varepsilon = \beta_m / E_m^\varepsilon,$$

a przy $n \rightarrow \infty$, zamieniając stałe E_m i E_m^ε funkcję rozkładu można zapisać jako:

$$E(t) / \sigma_1 = \varepsilon_0 \int_0^\infty E(t) \cdot e^{-t/t} dt.$$

Zachowanie się półfabrykatów w trakcie nagrzewania oraz ich modele mechaniczne i matematyczne są przedstawione w tabeli 1, model 6. Przy opracowaniu schematu strukturalnego obiektu, jakim jest układ dynamiczny obróbki cieplno-mechanicznej, modele te są rozpatrywane w połączeniu z zaprezentowanymi modelami mechanicznymi (tab. 1).

W celu dalszych przekształceń matematycznych, w przypadku rozpatrywanych modeli, należy sformułować zasadę superpozycji. Jeżeli na materiał, kolejno różnych odstępach czasu, oddziałuje szereg naprężeń, to każde wpływa na odkształcenie. Sumaryczne odkształcenie spowodowane działaniem naprężeń stałych σ_1 i σ_2 jest równe $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$, gdzie $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ – odkształcenia, które powstałyby, jeżeli σ_1 i σ_2 oddziaływałyby niezależnie, analogicznie, więc odkształcenie sumaryczne $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ jest spowodowane naprężeniami $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$.

Zasada superpozycji jest najbardziej ogólnym sformułowaniem wymagania liniowości, zawartym w przytoczonym wcześniej określeniu niesprężystości.

Przeanalizowano funkcję następstwa: w momencie t_i przyłożono naprężenie σ_i , z funkcji podatności wynika, że przy $t \geq t_i$, $\varepsilon(t) = \sigma \cdot j(t - t_i)$. Przy założeniu, że kolejno w czasie t_1, t_2, \dots, t_n są przykładane naprężenia σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), to zgodnie z zasadą superpozycji (jeżeli odkształcenie zmienia się dyskretnie lub ciągle) otrzymano:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot j(t-t_i) \text{ lub } \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t j(t-t_i) \sigma_i(t) dt . \quad (2)$$

Równanie (2) wiąże więc $\varepsilon(t)$ ze zmianami naprężenia w czasie przez funkcję podatności. Analogicznie, jeśli odkształcenie jest zmienną niezależną, a badana jest zależność naprężenia od czasu, to:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t-t_i) / j \text{ lub } \sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-t_i) \varepsilon(t) dt . \quad (3)$$

Równania całkowe (2) i (3) wskazują, że obiekt zachowuje się w taki sposób, jakby posiadał pamięć; odkształcenie w momencie t jest związane z czasem poprzednim, poprzez zmianę naprężenia $\sigma(t)$ i podatności $j(t)$, będących charakterystykami metalu. Ta własność pamięci pokazuje, że $\varepsilon(t)$ zależy nie tylko od chwilowej wartości $\sigma(t)$, ale również od parametrów wewnętrznych, których wartości chwilowe odtwarzają zachowanie materiału.

Jeżeli zmiany naprężenia $\sigma(t)$ w czasie przebiegają zarówno ciągle, jak i dyskretnie, to można zastosować kombinacje zależności (2) i (3), to znaczy

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot j(t-t_i) + \int_{-\infty}^t j(t-t_i) \sigma_i(t) dt . \quad (4)$$

Do pełnej analizy obiektu sterowania – układu dynamicznego obróbki cieplno-mechanicznej rozpatrzono kilka modeli z elementem sprężysto-plastycznym (tab. 1, model 4). Połączone szeregowo: element plastyczny i sprężyna utworzą model ciała sprężysto-plastycznego. Do granicy plastyczności σ_T ciało odkształca się sprężysto, płynięcie plastyczne zachodzi przy stałym naprężeniu. Po zdjęciu obciążenia powstaje odkształcenie trwałe. Równania stanu plastycznego, wiążące naprężenia z odkształceniem, nie zawsze mają rozwiązanie z powodu złożoności procesu odkształcenia plastycznego [1, 6].

Model z elementami ciągliwo-plastycznymi (tab. 1, model 5) charakteryzuje się równoległymi połączeniami elementów ciągliwego i plastycznego. Przy naprężeniu poniżej granicy plastyczności σ_T , ciało nie ulega odkształceniu: przy $\sigma_T = const = \sigma_0 > \sigma_T$, prędkość odkształcenia jest proporcjonalna do naprężenia $\sigma_0 - \sigma_T$. Model ten opisuje materiały, które mają zauważalną plastyczność przy wysokich naprężeniach (na przykład metale w wysokiej temperaturze).

Przy jednoosiowym stanie naprężeń, równanie odkształcenia – równanie odkształcenia środowiska ciągliwo-plastycznego ma postać przedstawioną w tabeli 1, model 5. Specyfiką takich modeli jest, że w strefach o naprężeniach niezbyt dużych nie powstają odkształcenia.

Połączenie szeregowo elementów ciągliwego i plastycznego utworzy model o następujących własnościach: przy $\sigma_1 > \sigma_T$ – czynnik płynie, podobnie jak ciecz lepka;

przy $\sigma_1 = R_e$ – ma miejsce płynięcie plastyczne, przy którym naprężenia nie mogą przekraczać granicy plastyczności. Dodatkowy element sprężysty włączony, do modelu ciągliwo-plastycznego, uwzględnia wpływ odkształceń sprężystych. W przypadku naprężeń niższych, niż granica plastyczności $\sigma_1 < \sigma_T$, model zachowuje się jak czynnik sprężysto-plastyczny, przy $\sigma_1 = \sigma_T$ występuje płynięcie plastyczne – naprężenia nie mogą być wyższe od granicy plastyczności.

Przedstawione wcześniej modele trzejelementowe, odpowiadające równaniu różniczkowemu odkształcenia, zawierające tylko naprężenia i odkształcenia oraz ich pochodne pierwszego rzędu po czasie, są modelami prostymi. W takich modelach funkcje podatności relaksacji naprężeń są funkcjami wykładniczymi, z których każda zawiera jeden czas relaksacji.

Przeanalizowano również modele bardziej złożone, opisujące niesprężyste materiały sztywne. Na podstawie modelu (tab. 1, model 1), można opisać zachowanie niesprężyste, w tym celu należy połączyć dwa modele szeregowo oraz dodatkowo włączyć szeregowo jedną sprężynę, uzyskując model zawierający pięć elementów. Równanie różniczkowe odkształcenia, zgodnie z przyjętymi wcześniej zasadami, zawiera w przypadku każdego elementu odpowiednie zależności między naprężeniem i odkształceniem, bez wszystkich zmiennych oprócz naprężenia sumarycznego i odkształcenia sumarycznego.

Równanie odkształcenia przekształcane jest do równania drugiego stopnia odnośnie σ oraz ε . Odkształcenie sumaryczne jest równe sumie odkształceń $\varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, a więc z modelu można bezpośrednio, bez rozwiązywania równania różniczkowego, otrzymać funkcję odkształcenia:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 [1 - \exp(-t/T_{\sigma}^{(1)})] + \varepsilon_2 [1 - \exp(-t/T_{\sigma}^{(2)})]. \quad (5)$$

Funkcja odkształcenia jest sumą dwóch członów rosnących wykładniczo, a podatność na relaksację jest określana zależnością $\varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, przy tym $T_{\varepsilon}^{(1)}$ i $T_{\sigma}^{(2)}$ – dwie wartości stałych czasowych (czas relaksacji) przy stałym naprężeniu.

Taki model nie umożliwia jednak rozwiązania zagadnienia relaksacji naprężeń, dlatego celowe jest jego przebudowanie, czyli równoległe podłączenie do dwóch równoległych modułów sprężyny (tab. 1, model 2); przy tym $E_{\Sigma} = E_1 + E_2$. Oba równania różniczkowe opisujące model pięcioelementowy są ekwiwalentne i zawierają pięć niezależnych parametrów. Funkcję relaksacji naprężeń można zapisać w postaci sumy dwóch relaksacji wykładniczych o czasie relaksacji równym stałym czasowym $T_{\varepsilon}^{(1)}$ i $T_{\sigma}^{(2)}$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \exp(-t/T_{\varepsilon}^{(1)}) + \varepsilon_2 \exp(-t/T_{\sigma}^{(2)}). \quad (6)$$

Z przedstawionej analizy ciała sztywnego o pięciu parametrach wynika, że w przypadku standardowego ciała niesprężystego jest możliwe zastosowanie dwóch ekwiwa-

lentnych modeli, pierwszego w celu otrzymania funkcji podatności, a drugiego – funkcji naprężenia. W przytoczonych modelach nie ma masy, ponieważ powoduje ona zachowanie typu rezonansowego, a nie relaksacyjnego.

Zalety zastosowania zaprezentowanych modeli są widoczne w bardziej złożonych przypadkach, kiedy równanie różniczkowe jest rzędu wyższego niż drugi, wtedy funkcję podatności naprężenia można wyprowadzić bezpośrednio z modelu. Nie jest do tego konieczna znajomość parametrów innego modelu ekwiwalentnego oraz współczynników równania różniczkowego przedstawiającego odkształcenia. Funkcję pełzania w przypadku modelu z pięcioma parametrami można uogólnić na przypadek modelu, zawierającego kilka modeli typu (tab. 1, model 1):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{(i)} [1 - \exp(-t/T_{\sigma}^{(i)})], \quad (7)$$

gdzie: $T_{\sigma}^{(i)}$ i $\varepsilon_{(i)}$ czas relaksacji i podatności i -go modelu.

Przy dużych naprężeniach, w przypadku wielu materiałów, zależność liniowa między naprężeniem i odkształceniem nie znajduje potwierdza w badaniach eksperymentalnych. Należy wtedy stosować zależności nieliniowe, które są jednak trudne do realizacji [7, 8] – bardziej właściwym rozwiązaniem jest zastosowanie równania przedłożonego w pracy [9]:

$$\varphi(\varepsilon_1) = \sigma_1(t) + \int_0^t Q(t-t_1) \cdot \sigma_1(t_1) dt_1, \quad (8)$$

gdzie: t_1 czas przyłożenia obciążenia – jeżeli t jest niewielki, to odkształcenie działania wtórnego, opisywane członem całkowym, jest małe czyli $\sigma_1 = \varphi(\varepsilon_1)$.

Równanie (8) w stosunku do funkcji $\varphi(\varepsilon_1)$ jest liniowe. Rozwiązując je względem σ_1 , otrzymano zależność:

$$\sigma_1(t) = \varphi(\varepsilon_1) - \int_0^t R(t-t_1) dt_1, \quad (9)$$

gdzie: $R(t-t_1)$ – współczynnik relaksacji.

Z rozwiązania równania (8) przy naprężeniu $\sigma_1 = const = \sigma_0$ wynika, że:

$$\varphi(\varepsilon_1) = [1 + K(t)]\sigma_0, \quad K(t) = \int_0^t Q(t-t_1) dt_1,$$

to znaczy krzywe odkształcenia przy ustalonych naprężeniach są podobne. W przypadku relaksacji, stała odkształcenia $\varepsilon_1 = const = \varepsilon_0$, z równania (9) uzyskuje się

$$\sigma_1 = [1 - L(t)]\varphi(\varepsilon_0), \quad L(t) = \int_0^t R(t-t_1) dt_1. \quad (10)$$

Jeżeli rozciąganie początkowe realizowane jest szybko, to w związku z relaksacją $\sigma_1 = \varphi(\varepsilon_0)$ można zapisać:

$$\sigma_1 / \sigma_0 = 1 - L(t), \quad (11)$$

czyli krzywe relaksacji również są podobne.

PODSUMOWANIE

Stwierdzono, że paczenie półfabrykatu jest funkcjonalnie powiązane z niejednorodnością odkształcenia plastycznego i pola temperaturowego oraz różnym charakterem odkształceń plastycznych i sprężystych przy zdejmowaniu obciążenia. Analogiczny proces zachodzi także z naprężeniami szczytkowymi, ich relaksacja zaczyna się niejednocześnie i w różnych częściach wyrobu zarówno w przekroju poprzecznym jak i wzdłużnym.

Przeanalizowano modele sterowania: odkształceniem sprężysto-plastycznym; zmiennością obciążeń zewnętrznych i procesem zdejmowania obciążenia. Do jakościowego zbadania procesów opracowano równania opisujące układ dynamiczny obróbki cieplno-mechanicznej jako obiekt sterowania.

Przedstawiono proste modele trzelementowe, odpowiadające równaniu różniczkowemu odkształcenia i zawierające tylko naprężenia i odkształcenia oraz ich pochodne pierwszego rzędu. W takich modelach funkcje podatności na relaksację naprężeń są funkcjami wykładniczymi, z których każda zawiera jeden czas relaksacji.

Przeanalizowano również modele bardziej złożone, opisujące materiały sztywne. W oparciu o nie można opisać również zachowanie niesprężyste, w tym celu należy połączyć dwa modele szeregowo oraz dodatkowo włączyć szeregowo jedną sprężynę, uzyskując model zawierający pięć elementów. Równanie różniczkowe odkształcenia zawiera w przypadku każdego elementu odpowiednie zależności między naprężeniem i odkształceniem, bez wszystkich zmiennych oprócz naprężenia sumarycznego i odkształcenia sumarycznego.

Zalety zastosowania opracowanych modeli są widoczne w bardziej złożonych przypadkach, kiedy równanie różniczkowe jest rzędu wyższego niż drugi, wtedy funkcję podatności naprężenia można wyprowadzić bezpośrednio z modelu. Nie jest do tego konieczna znajomość parametrów innego modelu ekwiwalentnego oraz współczynników równania różniczkowego odkształcenia.

PIŚMIENNICTWO

1. Drachev A.O., Drachev O. I., Taranenko G.V., Taranenko V.A., Swic A.: Termosilovaja obrabotka stupenchatykh osesimmetrichnykh detalej. Avtomatizacija: problemy, idei, reshenija: Materialy mezhdunar. nauchn.-tekhn. konf. Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2009: 18–21.

2. Drachev A.O., Taranenko G.V., Taranenko V.A., Swic A.: Sposob termomekhanicheskoy obrabotki nezhestkikh dlinnomernyh valov. Avtomatizacija: problemy, idei, reshenija: Materialy mezhdunar. nauchn.-tekhn. konf. Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2009.: 56–59.
3. Drachev O.I.: Tekhnologija izgotovlenija malozhestkikh osesimmetrichnykh detalej. Sankt-Peterburg: Izdatel'stvo Politehnika, 2005, 289 s.
4. Draczow O., Taranenko W.: Technologia modułowa wytwarzania osiowosymetrycznych wałów długich. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 230 Mechanika, z. 67 - Modułowe technologie i konstrukcje w budowie maszyn. Rzeszów 2006: 47–50.
5. Drachev O.I., Taranenko G.V., Taranenko V.A. Ehksperimental'nye issledovanija stabilizacii osi malozhestkojj detali pri ispolzovanii samocentrirujushikh lunetov. Mashinostroitelnye tekhnologii i tekhnika avtomatizacii. GIUA, Erevan 2008.
6. Draczow O., Taranenko W., Świć A., Halas W.: Controlling thermal deformations during mechanical shafts processing. Progressivnye tehnologii i sistemy mašinostroeniâ: Międzynarodnyj sbornik naučnyh trudov. Doneck: DonNTU, 2007. Vypusk 34: 278–283.
7. Garbarczuk W., Zinowicz Z., Świć A.: Kiberneticheskij podkhod k proektirovaniju sistem zashity informacii. Ukrainskaja Akademiya Informatiki, Volynskij Gosudarstvennyj Universitet im. Lesi Ukrainki, Lublinskij Politekhnikeskij Universitet. Kiev-Luck-Lublin 2003, 657s.
8. Koptev D.V. Zakonomernosti dvizhenija chastic pyli v zone dejstvija mestnogo iznosa. VCSPS NII OT. Sb. nauchn. rab. institutov OT. VCSPS. M. Vyp. 57, 1982: 9–14.
9. Postnikov V. S.: Vnutrennee trenie v metallakh. M.: Metallurgija, 1974, 23 s.
10. Taranenko W., Taranenko G., Szabelski J., Świć A.: Identyfikacja układu dynamicznego szlifowania wałów o małej sztywności. Politechnika Śląska, Wydział Mechaniczny Technologiczny. Modelowanie Inżynierskie, Tom 4, Nr 35, Czerwiec 2008. Gliwice: Zakład Graficzny Politechniki Śląskiej. 2008: 115–130.
11. Taranenko G., Taranenko V., Szabelski J., Swic A.: Identification and automation of shaft machining in elastic-deformable condition. Information systems architecture and technology, Model Based Decisions, Part IV, Wrocław University of Technology. Wrocław: Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 2008: 203–223.
12. Ivanov O., Draczow O., Taranenko V., Swic A.: *Mathematical models of chip formation during the process of turning*. Acta Mechanica Slovaca, Journal published by Faculty of Mechanical Engineering, the Technical University in Kosice, Kosice, 2-A/2007, Rocnik 11: 183–188.

MODELLING OF THE DYNAMIC SYSTEM OF THERMO-MECHANICAL PROCESSING OF NON-RIGID SHAFTS

Summary

The methodology of formulating mathematical models of thermo-mechanical processing of non-rigid shafts was presented in the article. The analysis of models of control was introduced for following parameters: the elastic and plastic deformation, the invariability of external loads and the processes of loads removal. The mathematical model of dynamic system of thermo-mechanical processing of non-rigid shafts was built for qualitative analysis of processes. Simple three-element models were introduced, describing only strains and stresses. More detailed mathematical models describing also inelastic solid bodies were analyzed as well.

Keywords: modeling, dynamic system, non-rigid shafts, thermo-mechanical processing.