

**Marcin Gapski, Piotr Koniorczyk, Monika Wielgosz,
Janusz Zmywaczyk ¹⁾**

ESTYMACJA CIEPŁA WŁAŚCIWEGO I PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ PMMA ORAZ PTFE PRZY UŻYCIU WYBRANYCH TECHNIK ODWROTNYCH

Streszczenie: W pracy wykorzystano zmodyfikowaną metodę chwilowego źródła ciepła oraz współczynnikową metodę odwrotną do jednoczesnej estymacji przewodności cieplnej λ oraz ciepła właściwego c_p materiałów izolacyjnych takich jak polimetakrylan metylu (PMMA) oraz politetrafluoroetylen (PTFE) w czasie jednego pomiaru. W procesie wyznaczania poszukiwanych parametrów termofizycznych bazowano na symulacyjnych i rzeczywistych sygnałach pomiarowych, przedstawiających nadwyżkę temperatury $\theta_m(t)$ w odległości H od chwilowego źródła ciepła. Uzyskane wyniki estymacji parametrów termofizycznych PMMA i PTFE porównano z wynikami referencyjnymi dostępnymi w literaturze.

Słowa kluczowe: termodynamika, nieustalone przewodzenie ciepła, parametry termofizyczne, metody odwrotne.

WSTĘP

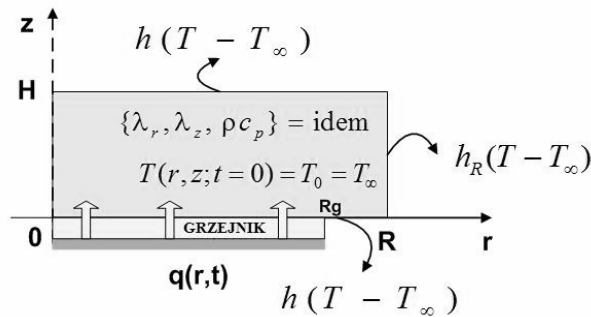
Znajomość właściwości termofizycznych ciał stałych takich jak np. przewodność cieplna λ lub ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p , jest niezbędna podczas projektowania, wytwarzania i eksploatacji określonych elementów konstrukcyjnych. Stąd w wyniku silnego rozwoju inżynierii materiałowej na świecie w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat pojawia się potrzeba opracowywania nowych oraz doskonalenia istniejących metod badawczych, do których należą m.in. metody dynamiczne (ang. transient methods). W metodach tych badane ciało wypróżnia się ze stanu równowagi termicznej za pomocą wymuszenia cieplnego o zadanym kształcie i czasie trwania, po czym dokonuje się pomiaru odpowiedzi termicznej układu w wybranym punkcie próbki. Zmierzona odpowiedź termiczna pozwala w przypadku jednorodnego i izotropowego ciała półnieskończonego oraz wymuszenia cieplnego jest typu delta Diraca, na obliczenie wartości liczbowych parametrów termofizycznych w oparciu o znajomość tylko położenia maksimum nadwyżki temperatury i czasu odpowiadającego temu maksimum. Rozwój modeli analitycznych i metodyki badań parametrów termofizycznych przy wykorzystaniu dynamicznej metody impulsowej (ang. pulse transient method) przedstawili Boháč i inni [3, 4, 5], którzy wyniki swoich rozważań odnieśli do PMMA trakto-

¹⁾ Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki, Instytut Techniki Lotniczej.

wanego jako materiał referencyjny. W grupie metod dynamicznych mieszczą się również współczynnikowe metody odwrotne. W metodach tych mamy do czynienia z iteracyjnym procesem uzgadniania zmierzonej i modelowej nadwyżki temperatury w jednym bądź w wielu punktach pomiarowych.

ZMODYFIKOWANA METODA CHWILOWEGO ŹRÓDŁA CIEPŁA

Modyfikacja metody chwilowego źródła ciepła jest wynikiem uwzględnienia skończonych rozmiarów badanej próbki i grzejnika cienkowarstwowego oraz potrzeby uwzględnienia wpływu warunków brzegowych na pole temperatury w badanej próbce poddanej określönemu chwilowemu wymuszeniu cieplnemu. W metodzie tej [6] zakłada się, że jednorodna próbka wykonana z materiału o kierunkowej przewodności cieplnej λ_r i λ_z ma kształt walca o promieniu R i wysokości H (Rys. 1). W chwili początkowej znajduje się ona w równowadze termodynamicznej z otoczeniem o stałej temperaturze T_∞ . Powierzchnie próbki wymieniają ciepło z otoczeniem na drodze konwekcji swobodnej ze współczynnikami przejmowania ciepła h_R dla $r=R$ oraz h dla $z=0$ i $z=H$. Zakłada się, że źródłem ciepła działającym na powierzchni $z=0$ w czasie $0 < t \leq t_g$ jest grzejnik cienkowarstwowy o promieniu $R_g < R$ i pomijalnej grubości, w stosunku do grubości próbki, którego gęstość energii wynosi q_0 .



Rys. 1. Model wymiany ciepła dla zmodyfikowanej metody chwilowego źródła ciepła

Rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego w punkcie $P(r=0, z=H)$ w postaci nadwyżki temperatury dane jest wzorem (1):

$$\Delta T(r, z; t) = \begin{cases} \frac{4q_0}{\rho c_p H} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k(r/R) B_l(z/H) \left(\frac{1 - \exp(-\gamma_{k,l} t)}{\gamma_{k,l}} \right), & \text{dla } t \leq t_g \\ \frac{4q_0}{\rho c_p H} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k(r/R) B_l(z/H) \left(\frac{\exp(-\gamma_{k,l}(t-t_g)) - \exp(-\gamma_{k,l} t)}{\gamma_{k,l}} \right) & \text{dla } t_g \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (1)$$

i zostało ono szczegółowo omówione w pracach [7, 8, 10].

W zmodyfikowanej metodzie chwilowego źródła ciepła wykorzystuje się również jeden punkt pomiarowy odpowiadający położeniu maksimum nadwyżki temperatury. Ponieważ pomiaru nadwyżki temperatury dokonuje się na tylnej powierzchni próbki w jej warstwie przypowierzchniowej, to czas $t=t_m$ odpowiadający θ_m jest większy od czasu $t=t_g$ odpowiadającemu chwili wyłączenia grzejnika, zatem do rozważań brane jest pod uwagę jedynie rozwiązanie dla czasu $t \geq t_g$, czyli:

$$\Delta T(r, z, t) = \frac{4q_0}{\rho c_p H} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k(r/R) B_l(z/H) \left(\frac{\exp(-\gamma_{k,l}(t-t_g)) - \exp(-\gamma_{k,l}t)}{\gamma_{k,l}} \right) \quad (2)$$

W punkcie położenia maksimum nadwyżki temperatury pochodna po czasie wyrażenia (2) jest równa zeru:

$$\frac{\partial \Delta T(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_m} = \frac{4q_0}{\rho c_p H} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k(r/R) B_l(z/H) (\exp(-\gamma_{k,l}t) - \exp(-\gamma_{k,l}(t-t_g))) = 0 \quad (3)$$

z którego to warunku otrzymujemy równanie na współczynniki $\gamma_{k,l}$ zawierające poszukiwane dyfuzyjności cieplne a_r oraz a_z . Warto w tym miejscu podkreślić, że współczynniki $\{\gamma_{k,l}\}$ zależą od pierwiastków równań charakterystycznych ω_k i ε_l będącymi funkcjami liczb Biota Bi_R i Bi , a te z kolei zawierają nieznane przewodności cieplne λ_r i λ_z . Wyznaczenie współczynników termofizycznych $\{a_r, a_z, \lambda_r, \lambda_z, c_p\}$ zmodyfikowaną metodą chwilowego źródła ciepła jest możliwe jedynie na drodze iteracyjnej przy czym należy dysponować dwiema próbkami tego samego materiału wyciętymi wzdłuż jego głównych kierunków, dla których oddzielnie wyznacza się $\{a_r, \lambda_r, c_p\}$ oraz $\{a_z, \lambda_z, c_p\}$. Proces iteracyjny przebiega w ten sposób, że najpierw wyznacza się z równania (3) dyfuzyjność cieplną $a=a_r=a_z$ występującą we współczynnikach $\{\gamma_{k,l}\}$, następnie ρc_p z równania (2) w punkcie maksimum nadwyżki temperatury ΔT_m po czym oblicza się przewodność cieplną λ_{new} z zależności $\lambda_{new} = a \rho c_p$. Gdy spełniony zostaje warunek: $(|\lambda_{new} - \lambda_{old}| / \lambda_{new}) < 0,0001$ obliczenia należy zakończyć, a otrzymane wartości liczbowe parametrów termofizycznych uznaje się za wyznaczone.

WSPÓŁCZYNNIKOWA METODA ODWROTNA

W celu porównania wyników estymacji parametrycznej wybranych parametrów termofizycznych za pomocą zmodyfikowanej metody chwilowego źródła ciepła oraz współczynnikowej metody odwrotnej bazującej na całej dostępnej informacji zawartej w odpowiedzi termicznej układu zdecydowano się wykorzystać ten sam model wymiany ciepła, którego rozwiązanie analityczne dane jest wzorem (1).

W zagadnieniu odwrotnym poszukiwane parametry termofizyczne badanego materiału są wyznaczone w procesie uzgadniania rzeczywistej odpowiedzi ter-

micznej układu $\mathbf{Y}(P^i, t_n)$ na zadane wymuszenie cieplne, z odpowiedzią modelową $\mathbf{T}(P^i, t_n)$ uzyskaną z rozwiązania określonego zagadnienia bezpośredniego, w przyjętych punktach pomiarowych P^i dla chwil t_n . Proces uzgadniania tych odpowiedzi sprowadza się do minimalizacji funkcjonału średniokwadratowego J , który w swej najprostszej postaci jest sumą kwadratów różnic pomiędzy zmierzoną a modelową nadwyżką temperatury w badanym punkcie próbki:

$$J(\mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^{LPP} \sum_{n=1}^{Nt} [T(P^i, t_n, \mathbf{u}^T) - Y_i(t_n)]^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \rightarrow \min \quad (4)$$

gdzie \mathbf{u} jest wektorem poszukiwanych parametrów termofizycznych danego materiału, LPP – liczbą punktów pomiarowych, Nt – liczbą kroków czasowych.

Minimum funkcjonału jest poszukiwane w sposób iteracyjny z wykorzystaniem metody Levenberga – Marquardta [10]. Rozwiązanie dla iteracji $(s+1)$ ma postać:

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{P}_{L-M}^{(s)} \{ \mathbf{X}^T(\mathbf{u}^{(s)}) [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{u}^{(s)})] \} \quad (5a)$$

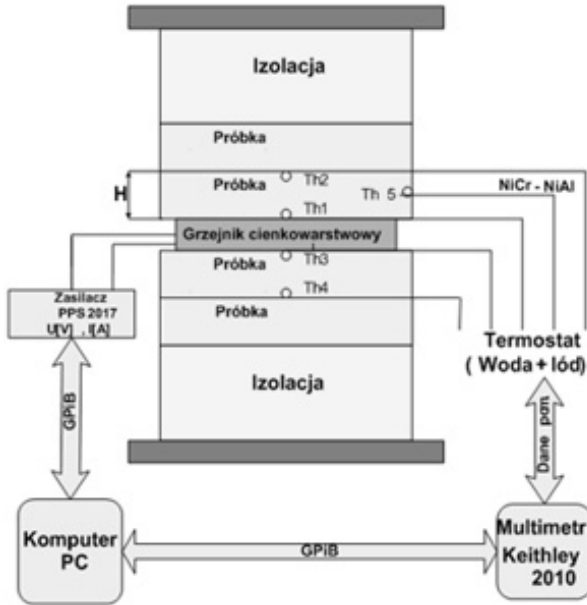
gdzie \mathbf{P}_{L-M} jest następującą macierzą

$$\mathbf{P}_{L-M}^{(s)} = [\mathbf{X}^T(\mathbf{u}^{(s)}) \mathbf{X}(\mathbf{u}^{(s)}) + \mu_s \mathbf{I}^{(s)}]^{-1} \quad (5b)$$

a \mathbf{X} jest macierzą współczynników wrażliwości termicznej [7]

OPIS UKŁADU POMIAROWEGO

W centralnej części stosu pomiarowego (rys.2) umieszczono cienkowarstwowy grzejnik o grubości $H_g=0,15\text{mm}$ i średnicy zewnętrznej wynoszącej $\phi=38\text{mm}$, zasilany prądem stałym $I(t)$ o zadanej napięciu $U(t)$ i czasie trwania t_g za pomocą stabilizowanego zasilacza AMREL PPS 2017 połączonego z komputerem interfejsem GPIB. Po obu stronach grzejnika umieszczono próbki badanego materiału, z których dwie sąsiadujące ze źródłem ciepła posiadały specjalne rowki wzdłuż średnicy, wewnątrz których umieszczono termoelementy typu K (NiCr – NiAl). Dodatkowo stos pomiarowy był obłożony z góry i z dołu warstwą izolacji termicznej ze styropianu w kropki oraz umieszczony w imadle pełniącym rolę docisku w celu zapewnienia lepszego kontaktu cieplnego pomiędzy powierzchnią próbki i grzejnika. Na czas eksperymentu całość była obłożona watą mającą za zadanie ograniczyć wpływ konwekcji. Pomiar napięcia termoelektrycznego odbywał się przy pomocy multimetru Keithley 2010, wyposażonego w 9-kanalową kartę termoparową Keithley 2001 TCSCAN, sterowanego z komputera za pomocą karty GPIB. Do sterowania całym układem pomiarowym i akwizycji sygnałów pomiarowych wykorzystano program utworzony w środowisku wirtualnych przyrządów pomiarowych LabWindows firmy National Instruments opracowany w roku 2000 w Zakładzie Aerodynamiki i Termodynamiki WAT.



Rys. 2. Schemat układu pomiarowego

WYNIKI BADAŃ

W procesie identyfikacji właściwości termofizycznych zmodyfikowaną metodą chwilowego źródła ciepła oraz współczynnikową metodą odwrotną wykorzystano próbki wykonane z PMMA o gęstości 1181kg/m^3 oraz z PTFE o gęstości 2185kg/m^3 . Średnica wszystkich próbek była równa 40mm , natomiast grubość wynosiła kolejno: 8mm i 10mm . Przeprowadzone doświadczenia miały na celu wykazanie, która z omawianych metod pozwala uzyskać bardziej zbliżone do wartości referencyjnych badanych materiałów wyniki jednoczesnej estymacji parametrycznej. W przypadku próbek z PMMA za wartości referencyjne c_p i λ przyjęto wyniki podane przez Assala i innych [1], którzy wykorzystując metodę dynamiczną gorącego drutu otrzymali dla temperatury pokojowej następujące wartości: przewodność cieplna $\lambda=0,1899\text{ W/m/K}$, ciepło właściwe $c_p=1397,5\text{J/kg/K}$. Rezultaty obliczeń własnych zawarto w tabeli 1.

Na podstawie tabeli 1 widać, iż w przypadku próbek wykonanych z PMMA uzyskane z obu metod ciepło właściwe jest porównywalne. Natomiast maksymalna odchyłka procentowa $(\Delta\lambda/\lambda)_{\max}$ dla dziesięciomilimetrowej próbki PMMA w zmodyfikowanej metodzie chwilowego źródła ciepła wyniosła $64,2\%$, podczas gdy w drugiej metodzie wyniosła $4,2\%$. Z kolei w przypadku ośmiomilimetrowych próbek wykonanych ze PTFE otrzymane wartości parametrów termofizycznych przy pomocy obu metod są zbliżone. Wyraźne różnice można zaobserwować natomiast dla próbek 10mm , gdzie w zmodyfikowanej metodzie chwilowego źródła ciepła zarówno c_p jak i λ odbiegają o ponad 20% od wartości referencyj-

nych ($\lambda=0,25\text{W/m/K}$, $c_p=1010\text{J/kg/K}$) [2], podczas gdy w drugiej metodzie $|(\Delta c_p/c_p)_{\max}|=2,1\%$, zaś $|(\Delta\lambda/\lambda)_{\max}|=2,9\%$.

Tabela 1. Wyniki estymacji parametrycznej dla PMMA i PTFE

Table 1. Parameter estimation results for PMMA and PTFE

	Zmodyfikowana metoda chwilowego źródła ciepła				Współczynnikowa metoda odwrotna			
	c_p [J/kg/K]	$\% \Delta c_p/c_p$	λ [W/m/K]	$\% \Delta \lambda/\lambda$	c_p [J/kg/K]	$\% \Delta c_p/c_p$	λ [W/m/K]	$\% \Delta \lambda/\lambda$
PMMA								
H=8mm	1368.42	2.3	0.1818	4.5	1382.84	1.2	0.1804	5.3
H=10mm	1349.30	3.8	0.1157	64.2	1402.69	0.2	0.1983	4.2
PTFE								
H=8mm	1222.17	17.4	0.3432	27.2	838.85	20.4	0.2122	17.8
H=10mm	1282.21	21.2	0.3290	24.0	989.20	2.1	0.2430	2.9

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy zaproponowano modyfikację modelu metody chwilowego źródła ciepła umożliwiającą wyznaczenie przewodności cieplnej λ oraz ciepła właściwego c_p w sposób iteracyjny, jak również współczynnikiem metodę odwrotną opartą na tym samym rozwiązaniu analitycznym zagadnienia bezpośredniego. Na podstawie tabeli 1, gdzie przedstawiono wyznaczone oboma metodami wartości poszukiwanych parametrów termofizycznych, w oparciu o rzeczywiste sygnały pomiarowe, widać wyraźnie wyższość współczynnikowej metody odwrotnej nad drugą z omawianych technik, niezależnie od materiału i grubości próbki. Jest to szczególnie dobrze widoczne w przypadku parametru λ zarówno dla materiału PMMA jak i PTFE.

Należy zaznaczyć, iż mimo wielu zalet metody chwilowego źródła ciepła takich jak m.in. krótki czas pomiaru czy prostota wzorów obliczeniowych, jej główną wadą jest wysoka czułość wyników zależna od dokładności wyznaczenia położenia maksimum nadwyżki temperatury. Lokalizacja położenia tego punktu może być obciążona dużym błędem, gdy próbka do badań ma zbyt dużą grubość (duże rozmycie) oraz gdy dobrano zbyt dużą moc wymuszenia cieplnego (wpływ efektów brzegowych). Wady tej częściowo pozbawiona jest współczynnikowa metoda odwrotna, która do wyznaczenia poszukiwanych parametrów termofizycznych wykorzystuje cały zapisany przebieg temperatury w danym punkcie pomiarowym. Z tego też powodu, technika ta wykazuje małą wrażliwość na zaszumienie sygnału.

PIŚMIENNICTWO

1. Assael M. J., Botsios S., Galou K., Metaxa I.N.: Thermal Conductivity of Polymethyl Methacrylate (PMMA) and Borosilicate Crown Glass BK7, International Journal of Thermophysics, Vol. 26, No. 5, Sep. (2005), pp. 1595-1605.

2. Blunn J., Lindemann A., Meyer M., Strasser C.: Characterization of PTFE Using Advanced Thermal Analysis Techniques, *International Journal of Thermophysics*, Vol. 31, 2010, pp.1919-1927
3. Boháč V., Vretenár V., Kubičár Ľ.: Optimisation methodology for the pulse transient method and its application at the measurement of thermophysical properties of materials, *Proc. THERMOPHYSICS 2005*, Oct. 12-13, Kočovce, Slovakia, pp. 57-71
4. Boháč V., Dieška P., Kubičár Ľ.: The progress in development of new models for pulse transient method, *Proc. THERMOPHYSICS 2007*, Oct. 11-12, Kočovce, Slovakia, pp. 24-33
5. Boháč V., Kubičár Ľ., Vretenár V.: Methodology of the testing of model for contact pulse transient method and influence of the disturbance effects on evaluating thermophysical parameters of the PMMA, *Measurement Science Review*, Vol. 5, Section 3, 2005, pp.98-103.
6. Gapski M., Zmywaczyk J.: Kompleksowe badania parametrów termofizycznych ciał stałych z wykorzystaniem nowej zmodyfikowanej metody chwilowego źródła ciepła oraz współczynnikowej metody odwrotnej (praca złożona do redakcji Biul. WAT).
7. Zmywaczyk J., Wielgosz M., Koniorczyk P., Gapski M.: Identification of some thermophysical and boundary parameters of black foamglas by an inverse method, *Proc. THERMOPHYSICS 2009*, Oct. 29-30, Valitce, Czech Republic. 2009, pp. 235-251
8. Zmywaczyk J., Gapski M.: Estimation of thermophysical parameters of stainless steel 1H18N9T by an inverse method, *Proc. THERMOPHYSICS 2010* Nov. 3-5, Valitce, Czech Republic, 2010, pp. 253-260.
9. Zmywaczyk J., Koniorczyk P., Gaj J.: Określanie parametrów termofizycznych polimetakrylanu metylu polistyrenu oraz stali stopowej 1H18N9T metodą chwilowego źródła ciepła, *Biuletyn WAT*, vol. LVI, nr 3 (647) 2007, str. 243-256.
10. Zmywaczyk J.: Estymacja parametrów termofizycznych ciał stałych z wykorzystaniem wybranych metod optymalizacji. Monografia WAT, Warszawa 2006.

ESTIMATION OF SPECIFIC HEAT AND THERMAL CONDUCTIVITY OF PMMA AND PTFE USING CHOSEN INVERSE TECHNIQUES

Summary

A modified heat pulse method and an inverse coefficient technique is presented for simultaneous estimation of: the thermal conductivity λ and the specific heat c_p of insulation materials such as polymethyl methacrylate (PMMA) and polytetrafluoroethylene (PTFE) during single measurement. Thermophysical parameter estimation process was based on simulated and real measurement signals, which shows temperature excess $\theta_m(t)$ at the back face of the sample. The paper presents the estimation results for PMMA and PTFE compared with reference values from literature.

Keywords: thermodynamics, transient heat transfer, thermophysical parameters, inverse techniques.