

Rafał Rumin ¹⁾

OPRACOWANIE MATEMATYCZNYCH I FIZYCZNYCH ZALEŻNOŚCI DO BUDOWY MODELU MATEMATYCZNEGO UKŁADU WYWAŻANIA WIRNIKÓW

Streszczenie: W referacie omówiono zagadnienia dotyczące powstawania drgań w wirnikach na skutek ich niewyważenia. W celu zaprojektowania układu automatycznego wyważania przy użyciu płynu jako masy korekcyjnej, opracowano model matematyczny wirnika oraz układu wyważającego. Zaproponowany system wyważania wykorzystuje tarcze korekcyjne, które umieszczone są na wale. Każda tarcza korekcyjna ma wewnątrz odpowiednio połączone ze sobą komory wypełniane płynem. Na skutek przepływu płynu (wykorzystywanego jako masa korekcyjna) do poszczególnych komór, następuje wyważenie wirnika i redukcja niepożądanych drgań mechanicznych. Przedstawiono możliwości wykorzystania układu wyważania do istniejących maszyn w przemyśle.

Słowa kluczowe: wyważanie wirników, redukcja drgań, aktywne metody wyważania, dynamika wirników.

WSTĘP

W przemyśle wykorzystuje się bardzo wiele urządzeń obrotowych wykorzystujących wirniki i wały. Niestety urządzenia wirnikowe narażone są na drgania wywołane przez głównie niewyważenie. W trakcie pracy drgania wirnika mogą spowodować dodatkowe ugięcie lub uszkodzenie wału, łożysk [3]. Aby zredukować ryzyko powstawania tego typu uszkodzeń, zaproponowano technologię ograniczającą niewyważenie. Działanie układu wyróżnia się możliwością wyważania podczas pracy wirnika bez konieczności zatrzymywania urządzenia. Pozwoli to na zwiększenie żywotności urządzenia i ograniczy koszty związane z przestojami serwisowymi.

IDEA I CEL BADAŃ

Celem badań jest opracowanie metody wyważania wirników z wykorzystaniem ciągłej zmiany masy korekcyjnej. Koncepcja wyrównoważania opiera się o zasadę zmiany położenia masy korekcyjnej poprzez dostarczanie płynu jako do odpowiednio zaprojektowanych komór. Komory te znajdują się w dodatkowej

¹ Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Katedra Robotyki i Mechatroniki.

tarczy umieszczonej na obwodzie wirującego wału, a przepływ płynu jest kontrolowany przez odpowiedni układ sterowania zaworami wlotowymi i wylotowymi.

NIETYWAŻENIE WIRNIKÓW

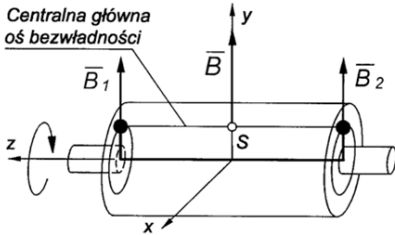
Powstawanie drgań w układach wirujących

Każdy poruszający się obrotowo mechanizm posiada określone przyspieszenia liniowe i kątowe. Obciążenia okresowo zmienne wywołują wiele niekorzystnych zjawisk [4, 6]: drgania elementów i naprężenia zmęczeniowe, nadmierne zużywanie się łożysk, drgania korpusów, fundamentów i otoczenia maszyny oraz związany z tymi zjawiskami hałas. Aby wyeliminować niepożądane zjawiska stosuje się korekcję rozkładu mas elementów maszyn zwaną wyważaniem.

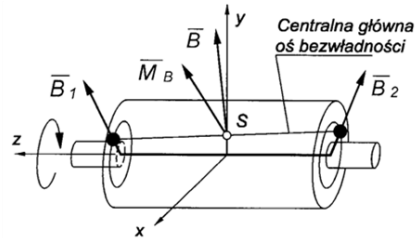
Wyważanie

Wyważanie realizowane jest poprzez zmianę (przez dodanie lub ujęcie) masy z tarczy wirnika na odpowiedniej płaszczyźnie, w taki sposób, aby środek ciężkości znajdował się na osi obrotu która jest główną, centralną osią bezwładności. W wielu przypadkach niezbędne jest wykonanie wyważenia statycznego i dynamicznego.

Wirnik niewyrównoważony statycznie



Wirnik niewyrównoważony dynamicznie



Rys. 1. Wektor główny sił bezwładności i moment główny sił bezwładności w wirniku statycznie i dynamicznie niewyważonym [3].

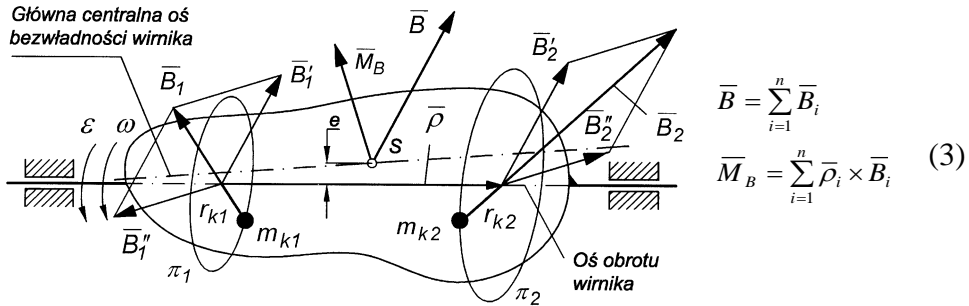
Wektor główny sił bezwładności jest równy zero, gdy spełnione są warunki:

$$Mx_S = \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0, \quad My_S = \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \quad (1)$$

Powyższe równanie oznacza, że środek masy wirnika znajduje się na osi obrotu i wirnik jest wyrównoważony statycznie [3, 5]. Moment główny sił bezwładności jest równy zero, jeśli spełnione są warunki:

$$D_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = 0 \quad \text{oraz} \quad D_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = 0 \quad (2)$$

Spełnienie przez układ mas dyskretnych warunku (2) oznacza, że oś obrotu jest główną osią bezwładności. Jeśli spełnione są równocześnie oba warunki (1) i (2) wówczas oś obrotu jest główną centralną osią bezwładności i wirnik jest wyrównowany dynamicznie (zupełnie). W wyniku redukcji sił i momentów otrzymujemy wektor główny sił bezwładności \bar{B} oraz moment główny sił bezwładności \bar{M}_B przyłożone w środku masy wirnika S.



Rys. 2. Wektor główny sił bezwładności i moment główny sił bezwładności oraz równoważny układ sił bezwładności w płaszczyznach korekcyjnych [3]

Aby wirnik wyrównować dynamicznie, należy w płaszczyznach π_1 i π_2 zwanych płaszczyznami korekcyjnymi (lub płaszczyznami wyważania) umieścić masy korekcyjne m_{k1} i m_{k2} na promieniach korekcyjnych r_{k1} i r_{k2} obróconych o kąt 180 stopni w stosunku do sił bezwładności \bar{B}_1 i \bar{B}_2 . Przy obrocie wału z prędkością kątową $\bar{\omega}$ masy korekcyjne wywołują siły bezwładności równoważące siły \bar{B}_1 i \bar{B}_2 , takie że muszą być spełnione równania:

$$B_1 = m_{k1} r_{k1} \omega^2 \quad \text{oraz} \quad B_2 = m_{k2} r_{k2} \omega^2 \quad (4)$$

OGÓLNY MODEL MATEMATYCZNY

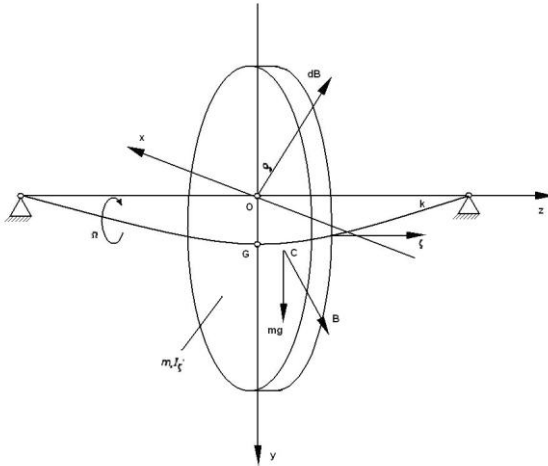
W celu opisanie ruchu całego układu zastosowane zostaną równania różniczkowe wzajemnie ze sobą sprzężone. Ogólne równanie ruchu zawierać będzie macierze: mas M, tłumienia D i sztywności K.

Powyższe macierze są reprezentacją odpowiednich podukładów maszyny obrotowej oznaczającej element: bezwładny (masa tarczy), sprężysty (wyginający się wał), oraz tłumiący (liniowo-wiskotyczny opór tarcia zewnętrznego). Wektor P oznacza uogólniony wektor wymuszeń zewnętrznych, natomiast uogólnione wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń określone są przez x, a czas przez t.

$$M\ddot{x} + D(x, \dot{x})\dot{x} + K(x, \dot{x})x = P(t) \quad (5)$$

RÓWNANIE RUCHU WIRNIKA

Do opracowania matematycznych równań ruchu wirnika przyjęto jako model jednotarczowy wirnik o niepodatnych łożyskach tzw. model Flöppla-Jefcotta [1, 2, 4]. Oś wału przechodzi przez geometryczny środek G tarczy. Na skutek niewyważenia środek ciężkości tarczy C nie pokrywa się z jej środkiem geometrycznym. Wektor zorientowany nazywa się wektorem mimośrodu.



Rys. 3. Wektor główny sił bezwładności i moment główny sił bezwładności oraz równoważny układ sił bezwładności w płaszczyznach korekcyjnych [4]

Ważną rzeczą jest prędkość kątowa wirnika, dla której on osiągnie stan krytyczny, czyli strzałka ugięcia osiągnie maksimum. Na rysunku widoczne jest wektor ugięcia wału ($OG=w$), wektor mimośrodu ($GC=E$), wektor wodzący ($OC=r$) środka masy C ma składowe:

$$r_x = \omega_x + \varepsilon \cos \varphi \quad (6)$$

$$r_y = \omega_y + \varepsilon \sin \varphi$$

Warunek równowagi sił:

$$m\ddot{r} + c\dot{w} + kw + mg = 0 \quad (7)$$

po podstawieniu za r :

$$m(\omega_x + \varepsilon \cos \varphi) + c\dot{w}_x + kw_x = 0 \quad (8)$$

$$m(\omega_y + \varepsilon \sin \varphi) + c\dot{w}_y + kw_y = mg$$

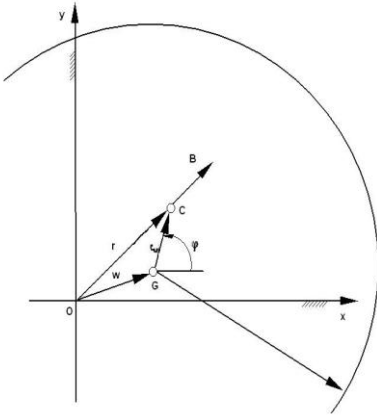
W związku z tym, że tarcza się obraca to musi moment napędowy przewyższać wartością moment oporów:

$$I_\zeta \ddot{\varphi} + (c\dot{w}_x + kw_x) \varepsilon \sin \varphi + (c\dot{w}_y + kw_y) \varepsilon \cos \varphi = \Delta M_z \quad (9)$$

Po rozpedzeniu tarczy, gdy momenty sił zewnętrznych się równoważą, czyli $\Delta M_z = 0$, to wirnik obraca się prawie jednostajnie. Zakładając, że promień bez-

władności tarczy $\sqrt{I_G/m}$ jest dużo większy od mimośrodów oraz $\Omega = \text{const}$, $\varphi = \Omega t$, to:

$$\begin{aligned} m\ddot{\omega}_x + c\dot{\omega}_x + k\omega_x &= m\varepsilon\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{\omega}_y + c\dot{\omega}_y + k\omega_y &= m\varepsilon\Omega^2 \sin \Omega t + mg \end{aligned} \quad (10)$$



Rys. 4. Wektor główny sił bezwładności i moment główny sił bezwładności oraz równoważny układ sił bezwładności w płaszczyznach korekcyjnych [4]

I – to masowy moment bezwładności tarczy względem osi geometrycznej.

Stacjonarny ruch płaski niewyważonej tarczy wirującej można interpretować jako superpozycję drgań wymuszonych, zachodzących w dwóch płaszczyznach, wzajemnie prostopadłych, więc otrzymujemy:

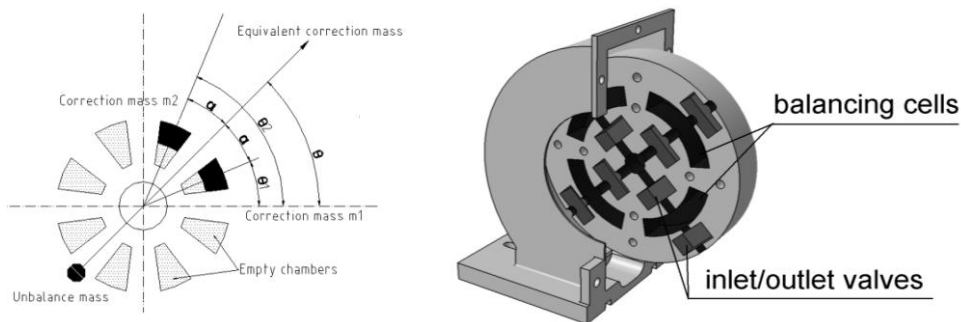
$$\ddot{\omega} + \gamma\omega\dot{\omega} + \omega^2\omega = \Omega^2 \varepsilon e^{i\Omega t} + ig \quad (11)$$

MODEL TARCZY Z MASĄ KOREKCYJNĄ

Zredukowany wektor główny sił bezwładności oraz moment główny sił bezwładności przyłożony w środku masy wirnika S może być zniesiony przez działanie masy korekcyjnej. Można określać kierunek działania wypadkowej siły bezwładności pochodzącej od dwóch mas korekcyjnych, tak aby stanowił przeciwagę dowolnego wektora siły niewyważającej – co widać na lewej części rysunku poniżej.

Projekt tarczy korekcyjnej zakłada, że w metalowej tarczy wydrążone zostaną cztery komory korekcyjne. W nich gromadzić będzie się będzie płyn zwiększający wypadkową masę tej części tarczy i tym samym korygując niewyważenie. Przepływ płynu do każdej komory będzie realizowane przez parę zaworów wlotowych/wylotowych. W tym celu wykorzystane zostaną specjalistyczne zawory do mikrodozowania płynu. Zapewniają one dużą szybkość, dokładność i powtarzalności dozowania cieczy do urządzenia. Czas otwarcia i zamknięcia zaworu piezoelektrycznego będzie mierzony i w ten sposób określona będzie ilość płynu

jaka ma być dostarczona do komory. Zmiana wypełnienia komór płynem (tj. objętość mas korekcyjnych) będzie mogła się odbywać w obu kierunkach, poprzez iteracyjne dodawanie lub odrzucanie części masy. Dzięki takiemu rozwiązaniu masy korekcyjne wirują wraz z wałem urządzenia wyważanego, a ich sterowanie odbywa się poprzez zespół zaworów umieszczonych w tarczy korekcyjnej. Schemat zastępczy oraz model tarczy korekcyjnej ukazane są poniżej.



Rys. 5. Schemat rozłożenia komór wypełnianych płynem (masą korekcyjną) oraz projekt tarczy korekcyjnej

WNIOSKI

Przyjęte założenia modelu matematycznego oparte są o podstawowe założenia modelu Flöppla-Jefcotta. W celu opracowania układu sterowania model ten będzie wymagał rozbudowania o człony związane z detekcją oraz korekcją niewyważenia. Zrealizowane to może być dopiero po dobraniu podzespołów (np. zawory) o odpowiednich parametrach.

W związku z tym iż w skład systemu wtryskiwaczy wchodzi - mikro zawory dozujące bardzo dużych prędkości, należy obliczyć parametry pracy dla każdego z zaworów. Istotnym problemem jest powstałe przy wysokich obrotach ciśnienie działające na zawór wylotowy. Wynika ono z siły odśrodkowej wirnika uzależnionej od prędkości obrotowej całego układu. Właśnie ten parametr jest największą barierą dla wykorzystania szybkodziałających zaworów hydraulicznych w wirnikach wysokoobrotowych, gdyż zawory te nie są odporne na wysokie ciśnienia.

PIŚMIENNICTWO

1. Darlow M. S., *Balancing of High-Speed Machinery*, New York: Springer, 1989.
2. Föppl A., "Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle," *Der Civilingenieur*, vol. 41, pp. 335-342, 1895.
3. Felis J., H. Jaworowski, J. Cieślak, *Teoria maszyn i mechanizmów. Cz 1: Analiza mechanizmów*, Kraków: Publishing House AGH, 2008.

4. Gryboś R., „Dynamika maszyn wirnikowych”, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1994.
5. Kiciński J., „Dynamika wirników i łożysk ślizgowych”, Wyd. IMP, PAN, 2005.
6. Nelson F. C., Tufts University, Medford, Massachusetts; “A Brief History of Early Rotor Dynamics”; Sound Vib 37 no. 6, The H. W. Wilson Company, 2003.

MATHEMATICAL MODELS OF BALANCING ROTORS BASED ON MATHEMATICAL AND PHYSICAL RELATIONSHIPS

Summary:

This paper presents the problem of the rotor vibration due to unbalance. In this research shows the propositions of design of the active balancing system for rotors by using fluid as the correction mass. This system uses a balancing corrective discs, which are placed on the shaft. It has been described a mathematical model of the equivalent correction mass allocation. The rotor-balancing system help to reduction unwanted mechanical vibrations. There are possibilities of using this technology for the existing machines in the industry.

Keywords: rotor balancing, unbalance, reduction of vibration, active methods of balancing, rotor dynamics.

Badania finansowane są przez Narodowe Centrum Nauki - nr wniosku: N N501 245140.